Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

ӘОЖ 517.968(043.3) Қолжазба құқығында

КОНИСБАЕВА КУРАЛАЙ ТАЛГАТОВНА

Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы секірісті шеттік есеп

8D05401 - Математика білім беру
бағдарламасы

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович
ф.-м.ғ.д.,профессор

Шетелдік ғылыми кеңесші
Марат Ахмет
ф.-м.ғ.д.,профессор,
Орта-Шығыс техникалық университеті,Түркия

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ 4
1 БАСТАПҚЫ СЕКІРІСІ БАР СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ..... 20
1.1 Есептің қойылымы 20
1.2 Іргелі шешімдер жүйесін құру 21
1.3 Коши функциясын құру 23
1.4 Шекаралық функцияларын құру 24
1.5 Сингулярлы ауытқыған шеттік есептің аналитикалық формуласы ... 30
1.6 Шешімнің асимптотикалық бағалауы 35
1.7 Өзгертілген ауытқымаған есеп 38
1.8 Мысал 41
2 ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ - ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖІКТЕЛУІ 50
2.1 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі 50
2.2 Шеттік есеп шешімінің асимптотикасын негіздеу 67
2.3 Мысал 69
ҚОРЫТЫНДЫ 76
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР 77

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері.

КІРІСПЕ

Зерттеудің өзектілігі. Дифференциалдық және интегралды–дифференциалдық теңдеулер ғылым мен техникадағы кең ауқымды процесстерді сипаттаудың негізгі құралы болып табылады. Мұндай теңдеулердің маңызды класы ретінде кіші параметрі бар теңдеулерді атап айтсақ болады. Кіші параметрдің жай ғана «кіші сан» емес, ол жүйенің сапалық сипатын өзгертетін негізгі фактор болып табылады. Кіші параметр есебінен берілген теңдеуде ауытқу пайда болады. Яғни, теңдеуде кіші параметрдің болуы шешімнің қасиеттерінің айтарлықтай өзгеруіне әкеледі және бұл параметр нөлге ұмтылғанда арнайы талдауды қажет етеді.

Кіші параметрі бар теңдеулерді *регулярлы* және *сингулярлы* деп бөлеміз. Регулярлы ауытқыған теңдеу, $\varepsilon = 0$ болғанда өзінің бастапқы типін, ретін, шарттар санын сақтайды. Және кіші параметр регулярлы ауытқыған есептерде кез келген жерде орналасуы мүмкін, бастысы $\varepsilon = 0$ кезде фундаментальді құрылымын өзгертпесе болды (мәселен, дифференциалдық теңдеудің ретіне әсер етпесе). Мысалы, ε кіші параметрі кіші туындыда не ізделінді функцияның өзінде тұрса:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0,$$

мұндағы, $\varepsilon = 0$ болғанда дифференциалдық теңдеудің реті өзгертпейді.

Сингулярлық ауытқыған есептер кіші параметр нөлге ұмтылған кезде бастапқы теңдеуден өзге теңдеу туындайды, бұл оның ретінің өзгеруімен, шекаралық шарттардың сәйкестігінің бұзылуымен және шешім құрылымында шекаралық қабаттар мен секіріс сияқты ерекшеліктердің пайда болуымен сипатталады. Яғни, регулярлы ауытқыған есептің сингулярлы ауытқыған есептен негізгі айырмашылығы, $\varepsilon \to 0$ кезде регулярлы ауытқыған есеп шешімі ауытқымаған есепке барлық берілген аймақта жинақталады. Бұл тікелей ауытқу теориясындағы әдістерді қолдануға мүмкіндік береді. Ал, сингулярлы ауытқыған есепте шешім бірқалыпты жинақталмайды.

Жалпы бұл ауытқу теорияның атауынан, теңдеуге енгізілген азғантай ауытқудың өзі шешімнің сипатына айтарлықтай әсер етуі мүмкін екендігін көрсетеді. Мұндай теңдеулер математикалық модельдеудің маңызды құралы болып табылады.

Сингулярлы ауытқыған есеп $\varepsilon \to 0$ ұмтылғанда дифференциалдық теңдеудің ретін төмендетіп, келесі қиындықтарға алып келеді: барлық бастапқы не шекаралық шарттарды қанағаттандыра алмайды, сондықтан шекаралық қабат пайда болуына әкеледі. Бұл қабаттарда шешімнің туындылары өте үлкен болып кетеді $\left(O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),... \right)$, сол себепті тікелей ε бойынша қатарға жіктеу әдісін қолдана алмаймыз. Бұл сингулярлы

ауытқыған теңдеулердің казіргі уақытта зерттеуді талап ететін математиканың маңызды бір бөлігі екенін көрсетеді.

Жалпы кіші параметрі бар дифференциалдық теңдеулерді талдаудың негізінде жатқан ауытқу теориясы XVIII-XIX ғасырлардағы еңбектерден бастау алады. Ауытқу теориясының бастауы Л.Эйлер мен Дж.Стокстың еңбектерінен бастау алады десек болады. Алайда әрқайсысы әртүрлі бағытта зерттеді. Эйлер аспан механикасы арқылы, Дж.Стокс толқын теориясы жағынан қарастырды.

Эйлер алғаш болып, планеталардың орбитасы Кепплердің идеалды эллипсі емес, көрші планеталардың әсерінен траекториясының ауытқуынан пайда болатынын байқады. Ал. Дж.Стокс ауытқу теориясын тұтқыр ортадағы аймаққа әкелді. Ол судағы толқынды зерттей отырып, классикалық сызықты теңдеу олардың нақты сипатын бермейтінін байқады. Стокс кіші параметрді (биіктіктің ұзындыққа қатынасы ретінде) енгізіп, сөйтіп кіші параметр арқылы қатар түрінде шешімді көрсетті.

Ал, Анри Пуанкаре, жалпы заманауи ауытқу теориясы мен динамикалық жүйелердің негізін қалаушы ретінде есептеледі. Регулярлы ауытқудың математикалық теориясы А.Пуанкаренің жұмыстарында жинақталған. Оның әдісі (Пуанкаре–Ляпунов әдісі) регулярлы ауытқыған есептер үшін арналған еді. Ол есептің шешімін ε кіші параметрінің дәрежесі бойынша қатар арқылы іздеуді ұсынды [1]. Ал, Александр Ляпунов периодты шешімді анықтайтын, кіші параметрдің дәрежесі бойынша қатардың жинақтылығын зерттейтін әдіс ойлап тапты [2]. Кейін бұл жұмыстар Ю.А.Рябовтың жұмыстарында [3] жалғасын тапты.

1837 жылы А.Лиувиль алғаш рет параметрі бар екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырды. Бұл жұмысы қазіргі сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулер теориясының бастамасы болды [12].

1907 жылы Шлезенгер [13] және 1908 жылы Биркгоф [14] жалпы сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеу үшін іргелі шешімдер жүйесінің құрылымы туралы теореманы дәлелдеді. Осылайша, сингулярлы ауытқыған теңдеулер теориясы кеңінен зерттеле бастады. Сингулярлы ауытқыған есептер стандартты емес болып көрінгенмін, олар зерттеу үшін ерекше қызығушылық тудырады, себебі олар бізге сапалық тұрғыдан жаңа құбылыстарды түсінуге мүмкіндік береді.

Ал, гидродинамикадағы шекаралық қабатты құбылыс алғаш рет Людвиг Прандтльмен қарастырылған. Ол 1904 жылы Халықаралық математикалық конгрессте шекаралық қабатқа арналған жұмысымен алғаш баяндама жасады [5]. Ал, Курт Отто Фридрихс алғашқылардың бірі болып «сингулярлы ауытқу» ұғымын алғаш енгізген. Оның жұмыстарында ауытқу теориясы механикалық есептерге қойылған. [6,7] Олардан өзге, американдық ғалымдар да сингулярлы ауытқыған теңдеулермен айналысқан болатын. Соның бірі, Н.Левинсон алғашқылардың бірі болып, сызықты емес шеттік есеп үшін шешімнің бар және жалғыздығын зерттеді[6]. Ал, В.Вазов жай дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы ауытқу теориясын және

асимптотикалық жіктелу бойынша жұмыс жасаған [8-11].

Сингулярлы ауытқыған теңдеулер физикада, химиялық кинетикада және математикалық биологиядағы процесстерді сипаттайтын математикалық модель ретінде және технология мен техникадағы қолданбалы есептерді зерттеуде қолданылады. Бұл математикалық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да қолданбалы теория мамандарының асимптотикалық әдіске қызығушылығын тудырады.

Әртүрлі асимптотикалық әдістердің дамуы туралы О'Мэлли [16] жұмыстарында, сингулярлы ауытқыған есепті зерттеу тарихы Василеваның кітабынан [24] табуға болады.

Асимптотикалық әдістер бойынша әртүрлі ауытқу әдістерінің кейбір аспектілерін және оларды қолдануды талқылайтын бірқатар кіріспе және кеңейтілген кітаптар бар. Олардың ішінде, мысалы, Чанг пен Хоуздың [25], Коулдың [26], Эрделидің [27], Хинчтің [28], Хоппенстедттің [29], Кеворкианның [30], Мердоктың [31], Мюррейдің [32], Нейленің [33-35], О'Мэллидің [15,16], Смиттің (36), Ван Дайктың [37], Вишиктің [38] және Вазовтың [39] монографиялары мен оқулықтары бар. Көптеген кітаптар кейбір нақты асимптотикалық әдісті сипаттауға арналған және негізгі идеялардан бастап нақты мысалдар үшін күрделі есептеулерге дейінгі материалдарды ұсынады.

Сингулярлы ауытқыған есептердің математикалық теориясы XX ғасырдың ортасынан бастап белсенді дами бастады. 40-шы жылдардан бастап шекаралық қабатты құбылысқа ие, сингулярлы ауытқыған теңдеулердің асимптотикалық интегралдау әдістерін құруда қарқынды зерттеулер жүргізіле басталды. Осы бағытқа елеулі үлес қосқан А.Н.Тихонов, Н.Н.Нефедов, В.Вазов, М.И.Вишик, Л.С.Понтрягин, Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский, В.П.Маслов, Л.А.Люстерник, А.Б.Васильева, М.И.Иманалиев, С.А.Ломов, В.Ф.Бутузов, Қ.А.Қасымов және т.б. Осы ғалымдардың еңбегінің нәтижесінде сингулярлы ауытқыған теңдеуді шешуге арналған әртүрлі асимптотикалық әдістер пайда болды.

Алғашқы болып, Кеңес математигі, академик А.Н.Тихонов [40] сингулярлы ауытқыған теңдеулердің математикалық теориясының негізін қалады десек болады. Оған дейін физикалық не техникалық есептерге қарастырылған болатын. Тихоновқа дейін сызықты сингулярлы ауытқыған есеп шешімі үшін физикада маңызды инструмент ВКБ (Вентцель–Крамерс–Бриллюэна) әдісі болды. А.Н. Тихоновтың жоғары туындысының алдында кіші параметрі бар жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған жұмыстары (Тихонов жүйесі деп аталатын) бүкіл теория үшін үлкен серпін берді. Ол t=0 нүктесінің аз маңайынан өзге бүкіл кесінді аралығында берілген жүйенің шешімі ауытқымаған жүйе шешіміне ($\varepsilon = 0$ болғанда алынған) жинақталу шартын берді. Бұл жұмыс кейінгі [41,42] жұмыстарында да жалғасын тапты. Және кейінгі шекаралық қабатты функциялар әдісі мен әйгілі Тихонов теоремасының туындауына алып келді.

А.Н.Тихоновтың құрған сингулярлы ауытқыған есептер теориясын ары

қарай шәкірттері жалғастырды және кеңейтті. Олар тереңірек зерттей отырып, әртүрлі есептерге қолдана бастады. Ең белгілі және тікелей Тихоновтың жұмыстарын ары қарай жалғастырған А.Б.Васильева болды [19-23]. Ол шекаралық қабатты функция әдісін қалағандарының бірі болды. Бұл әдіс арқылы сингулярлы ауытқыған есептің шешімінің асимптотикалық жіктелуін құруға болады. *Шекаралық қабатты функциялар әдісі* бойынша сингулярлы ауытқыған есеп шешімі екі бөліктен тұратын қосынды ретінде беріледі

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t) + \Pi(\tau,\varepsilon).$$

мұндағы $\bar{y}(t)$-регулярлы бөлік, ауытқымаған есеп шешімі, $\Pi(\tau,\varepsilon)$– шекаралық қабатты бөлік. Неге шекаралық қабатты функция енгізді деген сұрақ туындауы мүмкін. Бұл $\varepsilon \to 0$ болғанда теңдеудің реті төмендейді, шекаралық шарттардың жарты бөлігі қалып кетеді. Қарапайым ауытқымаған есеп барлық шарттарды қанағаттандыра алмайды. Сондықтан, шекаралық қабатты функция енгізіледі. Бұл әдіс арқылы шешімнің бірқалыпты жинақтылығын аламыз. Бұл диссертациялық жұмыста да, шекаралық қабатты функциялар әдісі қолданылады.

Вишик пен Люстерниктің [43] жұмысы Тихонов принципін жалғастыра отырып, сингулярлы ауытқыған есептер теориясында маңызды орын алды. Бұл жұмыс, ең жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар сызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеуге және жай дифференциалдық теңдеуге бағытталған. Ең алғаш шекаралық қабатты функиялар әдісі жүйелі түрде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге қолданды. Бұл мақаладан кейінгі [44-45] жұмыстарымен толыққан Вишик–Люстерник әдісі, математикалық физикада сингулярлы ауытқыған шеттік есептің асимптотикалық талдауы үшін маңызды инструмент болып қалды.

Теорияның негізгі бағыттарын одан әрі дамытуға Л.С. Понтрягин [51], Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский [52], М.И. Вишик, Л.А.Люстерник [53], А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов [54], С.А.Ломов [55], Иманалиев М.И. [56] және т.б. елеулі үлес қосқан.

Асимптотикалық әдістердің негіздері мен сингулярлы ауытқу теориясы, соның ішінде шекаралық функция әдісі, контрасты құрылымдар теориясы және шекаралық және ішкі қабаттарды талдау [57-64] еңбектерінде ұсынылған. Геометриялық сингулярлы ауытқу теориясы [65-68] жұмыстарында есепті геометриялық тұрғыдан қарастырды және онда Фенихель теориясының қолданылуы жүйеленді, көп өлшемді жүйелердегі «үйректер» типті (canards) арнайы шешімдер зерттелді. Ал, көп өлшемді динамика және кіші параметрлі теңдеулер үшін сандық әдістер [69-75] қарастырылды.

21 ғасырдың басында сингулярлы ауытқу теориясы тиімді басқару есептері мен көп өлшемді процестерді қоса алғанда, іргелі және қолданбалы

есептерінде айтарлықтай дамыды [76-82]. М.Иманалиев сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалды теңдеулердің шешімдерін құруға айтарлықтай үлес қосты[83,84], ал бисингулярлық есептердің дамуы Турсынов Д. пен Алымкулов К.[85-89] жұмыстарымен байланысты.

Сингулярлы ауытқыған есептерді заманауи зерттеулер сандық және аналитикалық әдістердің кең ауқымын қамтиды, соның ішінде арнайы шекаралық функцияларды пайдаланатын коллокациялық тәсілдер [90] және периодтық шеттік есептері үшін бірқалыпты емес торлардағы схемалар [91] жұмыстарында қарастырылған. Банах кеңістіктеріндегі бірнеше спектрлі жүйелер мен есептердің шешімдерін асимптотикалық талдау теориясы [92,93] жұмыстарында зерттелді. Бұл нәтижелер сингулярлы ауытқу теориясын одан әрі зерттеу үшін негіз болып табылады.

Шетелдік ғалымдардан бөлек, Қазақстандық ғалымдар да сингулярлы ауытқыған есептер теориясымен айналысты. Солардың ең алғашқысы, Л.А.Люстерниктің шәкірті Қ.А.Қасымов еді. Қ.Қасымов және оның шәкірттері күрделі сингулярлы ауытқыған есептер үшін конструктивті асимптотикалық әдіспен айналысты. Негізі, ол сингулярлы ауытқыған дифференциалдық және интегралды–дифференциалдық теңдеулерді зерттеді. Қ. Қасымов алғашқылардың бірі болып өзгертілген асимптотикалық әдісті кең ауқымды класстағы сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық теңдеулер үшін (Коши есебі және шеттік есептеріне) қолданды. Интегралды–дифференциалдық теңдеулер жай дифференциалдық теңдеуге қарағанда күрделі екені белгілі. Оң жағындағы интегралдық мүше қиындықтар туғызатыны анық. Қ.Қасымовтың жұмыстары осындай теңдеу шешімінің асимптотикалық жіктелуін құруға мүмкіндік берді. Сонымен қатар, Қ.Қасымовтың маңызды нәтижелерінің бірі шешімде пайда болатын бастапқы секіріс құбылысын табуы және анализ жасауын айтуға болады.

М.И. Вишик пен Л.А. Люстерник [45] және Қ.А. Қасымов [46] сәйкес өз жұмыстарында екінші ретті кіші параметрлі сызықты емес дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы секірісті бастапқы есепті қарастырған. Олар берілген бастапқы есеп шешімі өзгертілген шарттары бар ауытқымаған есеп шешіміне $\varepsilon \to 0$ болғанда ұмтылатындығын көрсетті. Мұндай есептерді бастапқы секірісті Коши есебі деп атай бастады. Ал, кіші параметрлі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі, интегралды–дифференциалдық теңдеулер және гиперболалық типті дербес туындылы теңдеулер үшін Коши есебінің жалпы жағдайын Қ.А.Қасымов зерттеді [47-50] және казіргі уақытта шәкірттері жалғастыруда.

Соңғы он жылдықта бұл зерттеудің ауқымы кеңейіп, бөлікті–тұрақты аргументті және импульстік әсері бар дифференциалдық теңдеулер теориясы дамуда. М. Ахмет алғаш рет жалпыланған типтегі бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулерді зерттеуді ұсынды [100-105]. Қазіргі уақытта бұл теңдеулер кеңінен қолданылады және теорияның негізі қаланған. М. Ахмет жасаған теория аясында жазылған көптеген еңбектер бар.

2018 жылдан бастап, М.Ахмет пен А.Е. Мирзакулованың жұмыстарында бөлікті-тұрақты дифференциалдық теңдеудің ең жоғарғы туындысының алдына кіші параметр енгізіліп, елеулі нәтиже алынды. Казіргі уақытта М.Ахмет, М.К. Дауылбаев мен А.Е. Мирзакулова осы бағытта бірнеше жұмыстар жасап, нәтижелер алуда [106-108].

Ал, импульстік әсері бар дифференциалдық теңдеулерді алғаш рет Ахмет пен Чаг зерттеді [109-111]. Кейіннен кіші параметр енгізіп, М.Ахмет пен Н.Авилтай ары қарай жалғастырды [112,113].

Сонымен қатар, казіргі уақытта Калимбетов Б.Т. Ломовтың регулиризация әдісімен сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулерді зерттеуде [114,115].

Бастапқы секірісті ең жоғарғы туындысының алдында кіші параметрі бар жай дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы және шеттік есепті Қ.Қасымов пен Д.Нұрғабыл зерттеген, ал интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер М.Дауылбаев пен оның шәкірттерімен [94-99] жұмыстарында қарастырылған.

Бұл жұмыстардың барлығында кіші параметр тек ең жоғарғы туындысының алдында кездесетін еді. Алғаш рет бірнеше жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар жай дифференциалдық теңдеуді қарастырып, талдау жасаған Вишик пен Люстерник еді [43]. Кейін, 2012 жылы алғашқы болып Қ.Қасымов пен Д. Нұрғабыл алғашқы m туындысының алдында кіші параметр бар сингулярлы ауытқыған біртекті емес жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін [116], кейінірек шеттік есепті қарастырды [117,118]. Ал, алғашқы m туындысының алдында кіші параметр бар сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін М. Дауылбаев және А.Мирзакулова зерттеді [119,120]. Алайда, сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылмаған еді.

Бұл диссертациялық жұмыста ең жоғары бірнеше туындыларының алдында кіші параметрлері бар интегралды–дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімін құру алгоритмі ұсынылады. Мұндай зерттеу бұрын жүргізілмеген.

Зерттеу мақсаты. Жоғарғы ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды–дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті зерттеу.

Зерттеу нысаны. Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды–дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды–дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп шешімін іздеу үшін шекаралық қабатты функциялар әдісі қолданылады.

Теориялық және практикалық құндылығы. Диссертациялық жұмыс теориялық сипатқа ие. Алынған нәтижелер сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеулер теориясының дамуына маңызды үлес қосады. Теңдеу сингулярлы ауытқыған теңдеулердің ең маңызды кластарының бірі. Ол физика, химия, биология, инженерия және басқа да

салалардағы әртүрлі процестерді зерттейтін математикалық модель болып табылады.

Бұл зерттеу жұмысы, осыған дейін бар болған сингулярлық ауытқу теориясын толықтырады және дамытады. Осылайша, бұл жұмыс күрделі операторлық теңдеулерді талдаудың асимптотикалық әдістерін одан әрі дамыту үшін өте маңызды.

Сонымен қатар, алынған нәтижелерді дифференциалдық теңдеулер, қолданбалы математика, механика және математикалық модельдеу бойынша мамандарды даярлауға арналған білім беру бағдарламаларында пайдалануға болады.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық, интегралды-дифференциалдық және импульстік теңдеулер шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары» (№AP23488301, 2024-2026жж.) жобасы аясында қаржыландырылып орындалды және докторант К.Конисбаева жоба орындаушысы ретінде қатысуда.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста бұрын қарастырылмаған есептер зерттеліп, келесі жаңа нәтижелер алынды:

- ең үлкен m туындыларының алдында кіші параметрі бар m+n ретті сингулярлы ауытқыған сызықтық интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің шешімінің аналитикалық формуласы алынды.
- сингулярлы ауытқыған есептің шешімінің асимптотикалық бағалаулары алынды;
- сингулярлы ауытқыған есеп шешімінің және оның туындыларының өсу реті белгіленді;
- өзгертілген ауытқымаған есеп құрылды;
- ауытқыған және өзгертілген ауытқымаған есептер шешімдерінің айырмасының бағалауы алынды;
- шешімнің және интегралдық мүшенің бастапқы секірісінің мәндері табылды;
- шеттік есеп шешінің кіші параметрге қатысты кез келген дәлдікпен асимптотикалық жіктелуі құрастырылды.

Аппробация. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-8 сәуір, 2021ж.), «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-7 сәуір, 2023ж.), Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының 70 жылдығына және Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Математика институтының 40 жылдығына арналған «V Бөрібаев оқулары» халықаралық ғылыми конференциясы (20-21 маусым 2024 ж.), Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың 90 жылдығына және академик Ш. С. Смағұловтың 75 жылдығына арналған "Ғылым, инженерия және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар" (CITech-2024) конференциясы (23-24 қазан 2024 ж.), Математикалық конгресс-2026,

ғалымдар күніне арналған дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференциясы (3-7 сәуір 2026 ж.), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультеті математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Зерттеу жұмысындағы алынған нәтижелер осыған дейін белгілі ғалымдар жасаған дәлелдемелермен, индекстелеген Халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сонымен қатар конференция материалдары арқылы расталады.

Жарияланымдар. Диссертацияның нәтижелері бойынша 7 жұмыс жарияланды:

–Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:

1. Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotical Convergence of Solutions of Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Higher-Order Integro-Differential Equations / Quaestiones Mathematicae Published online: 5 Jul V47, 2024 https://doi.org/10.2989/16073606.2024.2364297 Квартиль:Q2 Процентиль: 54, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.44 [121]

2. Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotic expansion of the solution of a boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations of higher orders\ Boundary Value Problem Journal \ 2025 (WoS (SCIE) Q2) https://doi.org/10.1186/s13661-025-02140-5 Квартиль: Q1, Процентиль: 75, Индекс цит.: 2, SJR: 0.479 [122]

3. Mirzakulova A.E., Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution of a singularly perturbed equation with piecewise constant argument Lobachevskii Journal of Mathematics/45(4), 2024г. DOI:10.1134/S1995080224601450 Квартиль: Q2, Процентиль: 57, Индекс цит.: 1.5, SJR: 0.435 [124]

4. Mirzakulova A.E., Konisbayeva K.T. Uniform asymptotic expansion of the solution for the initial value problem with a piecewise constant argument / Bulletin of the Karaganda, «Mathematics Series».- 116(4), 2024 г. https://doi.org/10.31489/2024m4/138-148 Квартиль: Q2, Процентиль: 53, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.392 [125]

5. Atakhan N., Nurpeissov K.S., Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution for a singularly perturbed equation with unbounded boundary conditions \ Bulletin of the Karaganda, «Mathematics Series».- №4(108)/2022 https://doi.org/10.31489/2022m4/20-33 Квартиль: Q2, Процентиль: 53, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.392 [123]

6. M.K. Dauylbayev, K.T. Konisbayeva, N.R. Tortbay Integral BVP for singularly perturbed system of differential equations // International Journal of Mathematics and Physics 12, No1, 25 (2021). С. 25-33. DOI:https://doi.org/10.26577/ijmph.2021. v12.i1.04 Квартиль:Q4, Процентиль: 7, Индекс цит.: 0.157, SJR: 0.4 [126]

7. K.T. Konisbayeva, M.K. Dauylbayev, Mirzakulova A.E., Asymptotic estimates of the solution of the BVP for singularly perturbed integro-differential equations// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. №1(129)-2026. – P. 39-51. https://doi.org/10.26577/JMMCS129120264 Квартиль:Q4, Процентиль: 18, Индекс цит.: 0.157, SJR: 0.4 [127]

–Халықаралық ғылыми конференциялардың еңбектеріндегі жарияланымдар:

1. Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралды шеттік есеп // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2021 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2021. –19 б.).[128]
2. Жоғары туындыларының алдында кіші параметрі бар сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 4-6 сәуір 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2024. –21б.). [129]
3. Асимптотическая оценка решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегралды-дифференциальных уравнений // Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының 70 жылдығына және Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Математика институтының 40 жылдығына арналған «V Бөрібаев оқулары» халықаралық ғылыми конференциясы, Бишкек, Қырғызстан, 20-21 маусым 2024 ж: баяндамалар тезистері. (Бишкек-2024. 59 б.) [130]
4. Asymptotic expansion of singularly perturbed integro-differential equations //Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың 90 жылдығына және академик Ш. С. Смақұловтың 75 жылдығына арналған "Ғылым, инженерия және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар" (CITech-2024) конференциясы, Алматы, Қазақстан, 23-24 қазан 2024 ж: баяндамалар тезистері. (Алматы-2024. 89 б.) [131]
5. Сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық теңде үшін шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы // Математикалық конгресс-2026. Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференциясы, Шымкент, Қазақстан, 3-7 сәуір 2026 ж: баяндамалар тезистері. [132]

Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 5 жұмыс жарияланды, оның ішінде: –бірінші (Q1) квартильге енгізілген Boundary Value Problem (Scopus дерекқорында процентилі 75) журналында 1 мақала, екінші (Q2) квартильге енгізілген Quaestiones Mathematicae (Scopus дерекқорында процентилі 54), Lobachevskii Journal of Mathematics (Scopus дерекқорында процентилі 57) , және Bulletin of the Karaganda, «Mathematics Series» (Scopus дерекқорында процентилі 53) журналдарында 4 мақала және (Q4)квартильге енгізілген International Journal of Mathematics and Physics (Scopus дерекқорында процентилі 7), Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science (Scopus дерекқорында процентилі 18) журналдарында 2 мақала; – Халықаралық конференциялардың тезистер жинағында 5

жарияланым.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық зерттеу жұмысы нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, негізгі екі бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның көлемі 85 бет.

Диссертацияның мазмұны. Диссертациялық жұмыстың кіріспесінде таңдалған тақырыптың өзектілігі түсіндіріледі, ғылыми жаңалығы тұжырымдалады, қолданылған зерттеу әдістері сипатталады, алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы сипатталады және жұмыстың құрылымына қысқаша шолу жасалады.

Бірінші бөлімде қосымша сипаттауыш теңдеудің түбірлері теріс болған жағдайда, m жоғары туындыларының алдында кіші параметрлері бар n+m ретті сызықтық интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шекаралық есеп қарастырылады.

Келесі түрдегі $n+m$ ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды–дифференциалдық теңдеуді

$$L_\varepsilon y=\sum_{r=1}^{m}\varepsilon^r A_{n+r}(t)\frac{d^{r+n}y}{dt^{r+n}}+\sum_{k=0}^{n}A_k(t)\frac{d^k y}{dt^k}=F(t)+\int_0^1\sum_{j=0}^{n_1+p}H_j(t,x)y^{(j)}(x,\varepsilon)dx \tag{1.1}$$

шекаралық шарттарымен

$$\begin{cases}\left.\dfrac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=0}=\alpha_i, \quad i=\overline{0,l-1}\\ \left.\dfrac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=1}=\beta_i, \quad i=\overline{0,q-1}\end{cases} \tag{1.2}$$

қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon>0-$ кіші параметр, α_i,β_i- белгілі тұрақтылар, $A_n(t)\neq 0,\ \ A_{n+m}(t)=1,\ \ m+n=l+q,\quad p=\overline{1,m}.$

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t)\in C^{n+m-1}([0,1]),\quad i=\overline{0,n+m},\quad F(t)\in C([0,1])$,

$H_i(t,x)\in C^{m-1}(D),\quad i=\overline{0,n_1+p},\quad D=(0\le t\le 1,0\le x\le 1).$

II. Қосымша сипаттауыш $\mu^m(t)+A_{m+n-1}(t)\mu^{m-1}(t)+\ldots+A_n(t)=0$ теңдеуі m теріс әртүрлі түбірлерге ие және $m<l,\ l-m=n_1$.

III.

$$\overline{J}_0 = \begin{vmatrix} h_1 y_{10}(t) & h_1 y_{20}(t) & \dots & h_1 y_{n0}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n_1} y_{10}(t) & h_{n_1} y_{20}(t) & \dots & h_{n_1} y_{n0}(t) \\ h_{l+1} y_{10}(t) & h_{l+1} y_{20}(t) & \dots & h_{l+1} y_{n0}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n+m} y_{10}(t) & h_{n+m} y_{20}(t) & \dots & h_{n+m} y_{n0}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

IV. 1 саны ε параметрінің жеткілікті аз мәнінде $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

V.

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1+\overline{d}_{l+1}(1) & \overline{d}_{l+2}(1) & \dots & \overline{d}_{l+q}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{d}_{l+1}^{(q-1)}(1) & \overline{d}_{l+2}^{(q-1)}(1) & \dots & 1+\overline{d}_{l+q}^{(q-1)}(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

мұндағы $\overline{d}_{l+i}^{(j)}(1),\ i=\overline{1,q},\ j=\overline{0,q-1}$ (1.1) теңдеудің коэффициенттері арқылы өрнектеледі.

Зерттеудің мақсаты - шешімнің асимптотикалық бағалауларын алу, қосымша шарттар қойылған нүктелердің маңындағы шешімдердің асимптотикалық сипатын анықтау, сондай-ақ берілген сингулярлы ауытқыған есептің шешімі ұмтылатындай сәйкес өзгертілген ауытқымаған есепті құру. Және интегралдық мүшедегі туындының ретін сипаттайтын бекітілген $p=\overline{1,m}$ параметрдің шеттік есептің сапалық сипатына әсері қарастырылады. Ол үшін ең алдымен сингулярлы ауытқыған біртекті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің $K(t,s,\varepsilon)$ Коши функциясы және $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ шекаралық функциялары құрастырылып, сәйкес шешімнің аналитикалық формуласы үшін келесі теорема алынды.

Теорема 1. Егер I-V шарттар орындалса, онда (1.1), (1.2) шеттік есебінің шешімі [0,1] кесіндісінде бар, жалғыз және келесі формуламен өрнектеледі:

$$y^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_{i-1} Q_i^{(j)}(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{q} C_{l+i} Q_{l+i}^{(j)}(t,\varepsilon) + P^{(j)}(t,\varepsilon), \quad j=\overline{0,n+m-1} \tag{1.3}$$

мұндағы, $Q_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ және $P(t,\varepsilon)$ келесі формуламен

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\varphi_i(s,\varepsilon)ds,$$

$$\varphi_i(t,\varepsilon)=\int_0^1\sum_{j=0}^{n_1+p}H_j(t,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx, \qquad (1.4)$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds.$$

ал, C_{l+i}, $i=\overline{1,n+m}$ келесі формуладан анықталады

$$C_i=\alpha_{i-1},\ i=\overline{1,l},$$

$$\overline{C}_{l+i}=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left[\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+i}\overline{\Delta}_{ki}\left(\beta_{k-1}-\overline{P}^{(k-1)}(1)-\sum_{j=1}^{n_1+p}\alpha_{j-1}\overline{d}_j^{(k-1)}(1)+\sum_{j=l+1}^{l+q}\alpha_{j-1}\overline{d}_j^{(k-1)}(1)\right)\right],\quad i=\overline{1,q} \qquad (1.5)$$

Теорема 1-дің дәлелдеуі, (1.4), (1.5) формуласын есептеуден тікелей шығады.

(1.3) шешімнің асимптотикалық сипатын және сәйкес (1.4),(1.5) формулаларын пайдалану арқылы, қарастырылып отырған шеттік есептің шешімі үшін асимптотикалық бағалауы туралы теорема алынды.

Теорема–2. Егер I-V шарттар орындалса, онда (1.1), (1.2) шеттік есебінің шешімі $\varepsilon\to 0$ ұмтылғанда келесі асимптотикалық бағалауды қанағаттандырады:

$$|y^{(j)}(t,\varepsilon)|\le C\left[\sum_{i=1}^{n_1}|\alpha_{i-1}|+\sum_{i=1}^{q}|\beta_{i-1}|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)+\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{i-1}\overline{\varphi}_i(t)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{p}|\alpha_{n_1+i-1}|+\varepsilon^i\sum_{i=p+1}^{m}|\alpha_{n_1+i-1}|\right)\overline{\varphi}_{n_1+i}(t)+\sum_{i=1}^{q}\beta_{i-1}\overline{\varphi}_{n_1+m+i}(t)\right|\Bigg]+$$

$$+C\varepsilon^{n_1-j}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n_1}|\alpha_{i-1}|+\sum_{i=1}^{q}|\beta_{i-1}|\right)\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{\mu_k^j(t)\omega_{1k}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right|+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i-1}|\alpha_{n_1+i-1}|\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+i}\frac{\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right|+ \qquad (1.6)$$

$$\left.+\varepsilon^q|F(t)|\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}\frac{\mu_k^j(t)\omega_{mk}(0)}{\mu_k^{n+1}(0)\omega(0)}\right|\right],\ j=\overline{0,n+m-1},$$

мұндағы $\overline{\varphi}_{n_1+i}(t),\ i=\overline{1,m}$ келесі түрде анықталады

$$\varphi_{n_1+i}(s,\varepsilon)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^{k+1}H^{(k)}_{n_1+i+k}(s,0)+O(\varepsilon)=\overline{\varphi}_{n_1+i}(t)+O(\varepsilon),\ \ i=\overline{1,p}\,,\\ \varepsilon^i\left[-\frac{\omega_i(0)}{\overline{J}\omega(0)}\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n_1-1}\overline{H}_j(s,x)\overline{J}^{(j)}_{n_1}(x)+\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j+1}\overset{(j)}{\overline{H}}_{n_1+j}(s,x)\overline{J}^{(n_1)}_{n_1}(x)\right)dx+\right.\\ \left.+\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^{i+j}\overline{H}^{(j)}_{n_1+j}(s,0)\frac{\omega_i(0)}{\omega(0)}+\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-k}(-1)^j H^{(j-1)}_{n_1+k+j}(s,1)\frac{\overline{J}^{(n_1+k)}_{n_1}(1)\omega_i(0)}{\overline{J}_0\omega(0)}+O(\varepsilon)\right]\equiv\\ \equiv\ -\varepsilon^i\left(\overline{\varphi}_{n_1+i}(s)+O(\varepsilon)\right),\ i=\overline{p+1,m}\end{cases}$$

ал $\omega(s)$ Вандермонд анықтауышы келесі түрдегі сипатқа ие

$$\omega(s)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \mu_1(s) & \mu_2(s) & \dots & \mu_m(s)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mu_1^{m-1}(s) & \mu_2^{m-1}(s) & \dots & \mu_m^{m-1}(s)\end{vmatrix}$$

және $\omega_{mk}(s)-\ \omega(s)$ анықтауышының m-ші жатық жол мен k-ші бағанды алып тастағандағы анықтауыш. Ондай болса, келесі тепе теңдіктің орынды

екендігін айта кеткен жөн:

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+i}\left.\frac{\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right|_{t=0}\equiv 0,\ \ j=\overline{n_1+i,n_1+m-1},\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}\left.\frac{\mu_k^j(t)\omega_{mk}(0)}{\mu_k^{n+1}(0)\omega(0)}\right|_{t=0}\equiv 0,\ \ j=\overline{n_1+i,n_1+m-1},$$

Шешімнің кіші параметрге қатысты асимптотикалық бағалауының сипаты және оның туындыларының өсу реті белгіленген. Сәйкесінше, Теорема 2-ден келесі тұжырымды аламыз:

$$y^{(i)}(0,\varepsilon)=O(1),\ \ i=\overline{0,n_1+m-1}$$

$$y^{(n_1+m)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^m}\right),$$

...,

$$y^{(n+m-1)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m+q-1}}\right),\ \ \varepsilon\to 0.$$

Бұл туындылардың өсу сипатына сүйене отырып, сингулярлы ауытқыған шеттік есептің (1.1), (1.2) шешімі $t=0$ нүктесінде n_1-ші ретті m дәрежелі бастапқы секіріс құбылысына ие деген қорытынды аламыз. Қарастырып отырған кесіндінің сол жақ шетіндегі берілген шеттік есептің шешімінде бастапқы секіріс құбылысы бар және секірістің реті анықталған. Шешім мен интегралдық мүшенің бастапқы секірістерін тұратын өзгертілген ауытқымаған шеттік есеп құрылған. Нәтижесінде алынған шектік көшу туралы теореманы аламыз.

Теорема-3. I-V шарттар орындалсын және

$$\Delta(t)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^k\,\overline{H}_{n_1+i+k}^{(k)}(t,0)\right)\Delta_i$$

теңдікті қанағаттандырсын. Онда берілген (1.1),(1.2) сингулярлы ауытқыған шеттік есептің $y(t,\varepsilon)$ шешімі үшін келесі шектік көшу орынды

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t),\ j = \overline{0, n_1 - 1},\ \ 0 \le t \le 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t),\ j = n_1, \overline{n+m-1},\ \ 0 < t \le 1,$$

мұндағы $\bar{y}(t)$ - өзгертілген ауытқымаған шеттік есептің шешімі.

2–бөлімде (1.1),(1.2) сингулярлы ауытқыған шеттік есептің шешімінің асимптотикалық жіктелуі жасалды.

2–бөлімде бастапқы секіріс құбылысына ие бірнеше жоғары туындыларының алдында кіші параметрі бар жоғарғы ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есеп қарастырылады. Бұл белгілі бір туындының ретінен бастап, кіші параметр нөлге ұмтылғанда бастапқы нүктедегі шешімдердің туындылары шексіздікке ұмтылатынын білдіреді. Бұрын мұндай теңдеулер кластары зерттелмеген. Қарастырылып отырған есептің шешімдерінің бірқалыпты асимптотикалық жіктелуі кіші параметрдің дәрежесі бойынша кез келген дәлдікте құрастырылған. Шешімнің асимптотикалық жіктелуінің қалдық мүшесінің бағалауы келесі теорема түрінде тұжырымдалып, дәлелденген.

Теорема-7. [0,1] кесіндісіндегі $A_i(t), F(t), i = \overline{0, n+m-1}$ функциясы және $D = (0 \le t, x \le 1)$ анықталу аймағындағы $H_i(t,x),\ i = \overline{0, n_1 + m}$ функциялар $(N + n_2 + m)-$-ші ретті қоса алғанда туындыларымен бірге үзіліссіз болсын және II шарт орындалсын. Сонда, жеткілікті аз мәндері үшін (1.1), (1.2) есептің аралықта шешімі бар, жалғыз және

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}_N(t,\varepsilon) + R_N(t,\varepsilon),$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$ функциясы

$$\bar{y}_N(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^{n_1} \sum_{k=0}^{N+n_2+m-1} \varepsilon^k w_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

формуласымен сипатталады және $R_N(t,\varepsilon)$ қалдық мүшесі үшін келесі бағалау орынды:

$$\left| R_N^{(i)}(t,\varepsilon) \right| \le K\varepsilon^{N+1}, \quad i = \overline{0, n+m-1}, \quad 0 \le t \le 1,$$

мұндағы $K > 0$ - ε нан тәуелсіз тұрақты

Теориялық нәтижені растау үшін моделдеу арқылы сандық мысалдар келтіріледі.

Қорытынды бөлімде жалпы алынған нәтижелерге талдаулар жасалынды.

Алғыс. Автор диссертацияның барлық кезеңдерінде кәсіби басшылығы, құнды ұсыныстары және үздіксіз қолдауы үшін отандық жетекші әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің механика-математика факультетінің «Математика» кафедрасының физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Дауылбаев Муратхан Кудайбергеновичке және шетелдік ғылыми кеңесшісі-Таяу Шығыс техникалық университеті «Математика» кафедрасының физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Марат Ахметке шын жүректен алғысын білдіреді. Олардың терең білімі, зейінді көзқарасы және баға жетпес көмегі зерттеу бағытын қалыптастыруда және алынған нәтижелерге қол жеткізуде маңызды рөл атқарды.

Осы зерттеудің сәтті жүзеге асырылуына ықпал еткен ғылыми зерттеулерді қолдағаны және ғылымның дамуына қолайлы жағдайлар жасағаны үшін Қазақстан Республикасы Үкіметіне және жұмыс жүргізілген университетке осы зерттеуді жоғары сапалы жүргізуге мүмкіндік беретін ресурстарды, ғылыми инфрақұрылымды және ғылыми зерттеуді жоғары сапалы жүргізуге мүмкіндік беретін ресурстарды, ғылыми инфрақұрылымды және қолдаушы академиялық ортаны қамтамасыз еткені үшін әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетіне алғысымды білдіремін.

1 БАСТАПҚЫ СЕКІРІСТІ СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

1.1 Есептің қойылымы

Келесі түрдегі сингулярлы ауытқыған жоғарғы ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті қарастырайық

$$L_\varepsilon y = \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{r+n} y}{dt^{r+n}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n_1+p} H_j(t,x) y^{(j)}(x,\varepsilon) dx,\ p = \overline{1,m}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} h_{i+1} y(t,\varepsilon) &\equiv y^{(i)}(0,\varepsilon) = \alpha_i,\ i = \overline{0,l-1}, \\ h_{l+1+i} y(t,\varepsilon) &\equiv y^{(i)}(1,\varepsilon) = \beta_i,\ i = \overline{0,q-1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, α_i, β_i – белгілі тұрақтылар, $A_{n+m}(t) = 1,\ m+n = l+q$.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t) \in C^{n+m-1}([0,1]),\quad i = \overline{0,n+m},\quad F(t) \in C([0,1]), H_i(t,x) \in C^{m-1}(D),$

$i = \overline{0,n_1+p},\quad D = (0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1).$

II. Қосымша сипаттауыш $\mu^m(t) + A_{m+n-1}(t)\mu^{m-1}(t) + \ldots + A_n(t) = 0$ теңдеуі m теріс әртүрлі түбірлерге ие және $m < l,\ l - m = n_1$.

III.

$$\overline{J}_0 = \begin{vmatrix} h_1 y_{10}(t) & h_1 y_{20}(t) & \ldots & h_1 y_{n0}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n_1} y_{10}(t) & h_{n_1} y_{20}(t) & \ldots & h_{n_1} y_{n0}(t) \\ h_{l+1} y_{10}(t) & h_{l+1} y_{20}(t) & \ldots & h_{l+1} y_{n0}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n+m} y_{10}(t) & h_{n+m} y_{20}(t) & \ldots & h_{n+m} y_{n0}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

IV. 1 саны ε параметрінің жеткілікті аз мәнінде $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

V.

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1+\overline{d}_{l+1}(1) & \overline{d}_{l+2}(1) & \dots & \overline{d}_{l+q}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{d}_{l+1}^{(q-1)}(1) & \overline{d}_{l+2}^{(q-1)}(1) & \dots & 1+\overline{d}_{l+q}^{(q-1)}(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

мұндағы $\overline{d}_{l+i}^{(j)}(1),\ i=\overline{1,q},\ j=\overline{0,q-1}$ (1.1) теңдеудің коэффициенттері арқылы өрнектеледі.

1.2 Іргелі шешімдер жүйесін құру

(1.1) теңдеу үшін біртекті сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеу қарастырайық

$$L_\varepsilon y \equiv \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t)\frac{d^{r+n}y}{dt^{r+n}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t)\frac{d^k y}{dt^k} = 0. \qquad (1.3)$$

Лемма 1. Егер I-II шартар орындалса, онда (1.3) теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесі $O(\varepsilon)$ дәлдікпен келесі түрде өрнектеледі:

$$y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},\qquad j=\overline{0,n+m-1},$$

$$y,_{n+r}^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_r(x)dx\right)(y_{n+r}(t)\mu_r^j(t) + O(\varepsilon)),\ r=\overline{1,m},\ j=\overline{0,n+m-1}, \qquad (1.4)$$

мұндағы $y_{io}(t),\ i=\overline{1,n}$ функциялары

$$\begin{cases} A_n(t)y_{io}^{(n)}(t) + \dots + A_0(t)y_{io}(t) = 0, \\ y_{io}^{(j)}(0) = \delta_{i-1,j},\ j=\overline{0,n-1},\ i=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (1.5)$$

есебінен анықталады, мұндағы δ_{ij} – Кронекер символы, $y_{n+r}(t),\ i=\overline{1,m}$ функциялары

$$\begin{cases} p_r(t)y'_{n+r,0}+q_r(t)y_{n+r,0}=0 \\ \\ y_{n+r,0}(0)=1,\ r=\overline{1,m,} \end{cases} \tag{1.6}$$

есебінің шешімі болады, ал

$$p_r(t)=\sum_{i=0}^{m}A_{n+i}(t)(n+i)\mu_r^{n+i-1}(t),$$

$$q_r(t)=\mu'_r(t)\sum_{i=0}^{m}A_{n+i}(t)C_{n+i}^2\mu_r^{n+i-2}(t)+A_{n-1}(t)\mu_r^{n-1}(t),\ r=\overline{1,m},$$

$$C_{n+i}^2=\frac{(n+i)!}{2!(n+i-2)!},\ i=\overline{0,m}.$$

(1.4) іргелі шешімдер жүйесі көмегімен вронскиан анықтауышының асимптотикалық сипатын аламыз:

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{\lambda}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx}\pi(t)\omega(t)\overline{W}(t)(1+O(\varepsilon))\neq 0, \tag{1.7}$$

мұндағы $\overline{W}(t)-$ауытқымаған (1.5) теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесінің вронскианы, яғни

$$\overline{W}(t)=\begin{vmatrix} y_{10}(t) & \dots & y_{n0}(t) \\ \dots & & \\ y_{10}^{(n)}(t) & \dots & y_{n0}^{(n)}(t) \end{vmatrix},\quad \lambda=\frac{2n+m-1}{2}m$$

$$\pi(t)=\prod_{k=1}^{m}y_{n+k,0}(t)\mu_k^n(t),\quad \mu(t)=\mu_1(t)+\dots+\mu_m(t),$$

ал, $\omega(t)$ анықтауышы $\mu_k(t),k=\overline{1,n}$ функцияларынан құралған m-ретті Вандермонд анықтауышы, яғни

$$\omega(t)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1(t) & \mu_2(t) & \dots & \mu_m(t) \\ \dots & & & \\ \mu_1^{m-1}(t) & \mu_2^{m-1}(t) & \dots & \mu_m^{m-1}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.3 Коши функциясын құру

Анықтама 1.1.

$$\begin{cases} L_\varepsilon K\ (t,s,\varepsilon)=0,\ \ 0\le s\le t\le 1, \\ \\ K^{(j)}(s,s,\varepsilon)=0,\ j=\overline{0,n+m-2},\ \ K^{(n+m-1)}(s,s,\varepsilon)=1 \end{cases} \tag{1.8}$$

есебінің шешімі болатын $K(t,s,\varepsilon),\ 0\le s\le t\le 1$ функциясы *Коши функциясы* деп аталады.

I-II шарттары орындалғанда, $K(t,s,\varepsilon)$ функциясы

$$K(t,s,\varepsilon)=\frac{W_{n+m}(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)} \tag{1.9}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $W_{n+m}(t,s,\varepsilon)-W(s,\varepsilon)$ вронскианның $n+m$-ші жатық жолын (1.3) теңдеуінің $y_1(t,\varepsilon),y_2(t,\varepsilon),...,y_{n+m}(t,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғандағы $n+m$-ші ретті анықтауышты айтады:

$$W_{n+m}(t,s,\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(s,\varepsilon) & y_2(s,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(s,\varepsilon) \\ y_1'(s,\varepsilon) & y_2'(s,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}'(s,\varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n+m-2)}(s,\varepsilon) & y_2^{(n+m-2)}(s,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}^{(n+m-2)}(s,\varepsilon) \\ y_1(t,\varepsilon) & y_2(t,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Лемма 2. Айталық, I-III шарттар орындалсын. $K(t,s,\varepsilon),\ 0\le s\le t\le 1$ Коши функциясы үшін $\varepsilon\to 0$ келесі асимптотикалық формуласын аламыз:

$$K^{(j)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon^m\left[(-1)^m\frac{W_n^{(j)}(t,s)}{W(s)A_n(s)}+\varepsilon^{n-1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_k(x)dx}(-1)^{m+k}\cdot\right.$$

(1.10)

$$\left.\cdot\frac{y_{n+k}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(s)\mu_k^n(s)}\cdot\frac{\omega_{mk}(s)}{\omega(s)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_k(x)dx}\right)\right],\ j=\overline{0,n+m-1}.$$

$K(t,s,\varepsilon),\ 0\le s\le t\le 1$ Коши функциясының $\varepsilon\to 0$ асимптотикалық бағалаулары келесі түрде өрнектеледі:

$$\left|K^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^m+Ce^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}},\ j=\overline{0,n+m-1}.$$

Дәлелдеуі (1.10) асимптотикалық формуладан шығады.

1.4 Шекаралық функцияларын құру

Анықтама 1.

$$\begin{cases}L_\varepsilon\Phi_i(t,\varepsilon)=0,\\ \\ h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki},\ i,k=\overline{1,n+m}\end{cases}\tag{1.11}$$

есебінің шешімі болатын $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ функциясы (1.1),(1.2) есебінің *шекаралық функциясы* деп аталады, мұндағы δ_{ki} -Кронекер символы. Шекаралық функция келесі формуладан анықталады

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{J_i(t,\varepsilon)}{J(\varepsilon)},\tag{1.12}$$

мұндағы

$$J(\varepsilon)=\begin{vmatrix} h_1y_1(t,\varepsilon) & h_1y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_1y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_2y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n+m}y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m}y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m}y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix},$$

ал $J_i(t,\varepsilon)-\ J(\varepsilon)$ анықтауышының i-ші жатық жолын (1.3) теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғандағы анықтауыш.

$i=1$ үшін (1.12) теңдікті дәлелдеу үшін $\Phi_1(t,\varepsilon)$ функциясын

$$\Phi_1(t,\varepsilon)=C_1y_1(t,\varepsilon)+C_2y_2(t,\varepsilon)+\dots+C_{n+m}y_{n+m}(t,\varepsilon) \qquad (1.13)$$

түрінде іздейтін боламыз, бұл жердегі $C_i,\ i=\overline{1,n+m}$ белгісіз тұрақтылар, ал $y_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ (1.3) сызықты біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі. Енді $C_i,\ i=\overline{1,n+m}$ белгісіз тұрақтыларды анықтау үшін (1.13) функциясын (1.2) шеттік шартқа бағындырып, келесі түрдегі сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} h_1\Phi_1(t,\varepsilon)=C_1h_1y_1(t,\varepsilon)+C_2h_1y_2(t,\varepsilon)+\dots+C_{n+m}h_1y_{n+m}(t,\varepsilon)=1 \\ h_2\Phi_1(t,\varepsilon)=C_1h_2y_1(t,\varepsilon)+C_2h_2y_2(t,\varepsilon)+\dots+C_{n+m}h_2y_{n+m}(t,\varepsilon)=0 \\ \dots \\ h_{n+m}\Phi_1(t,\varepsilon)=C_1h_{n+m}y_1(t,\varepsilon)+C_2h_{n+m}y_2(t,\varepsilon)+\dots+C_{n+m}h_{n+m}y_{n+m}(t,\varepsilon)=0. \end{cases}$$

Осы теңдеулер жүйесінен $C_i,\ i=\overline{1,n+m}$ шамаларын анықтаймыз:

$$C_1=\frac{(-1)^{1+1}}{J(\varepsilon)}\begin{vmatrix} h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_2y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m}y_2(t,\varepsilon) & h_{n+m}y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m}y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix},$$

$$C_2 = \frac{(-1)^{1+2}}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix},$$

...

$$C_{n+m} = \frac{(-1)^{1+m+n}}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m-1}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m-1}(t,\varepsilon) \end{vmatrix}$$

C_i, $i = \overline{1, n+m}$ анықталған шамаларын (1.13) теңдікке қойып, $\Phi_1(t,\varepsilon)$ үшін келесі формуланы аламыз:

$$\Phi_1(t,\varepsilon) = \frac{(-1)^{1+1}}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} h_2 y_2(t,\varepsilon) & h_2 y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_2(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix} y_1(t,\varepsilon) -$$

$$- \frac{(-1)^{1+2}}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_3(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix} y_2(t,\varepsilon) + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^{1+m+n}}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m-1}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m-1}(t,\varepsilon) \end{vmatrix} y_{n+m}(t,\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{J(\varepsilon)} \begin{vmatrix} y_1(t,\varepsilon) & y_2(t,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m}(t,\varepsilon) \\ \dots & & & \\ h_{n+m} y_1(t,\varepsilon) & h_{n+m} y_2(t,\varepsilon) & \dots & h_{n+m} y_{n+m}(t,\varepsilon) \end{vmatrix} = \frac{J_1(t,\varepsilon)}{J(\varepsilon)}.$$

Дәл осылай, $i = \overline{2, n+m}$ үшін $\Phi_i(t,\varepsilon)$ функциялары үшін (1.12) формуласын аламыз.

$J(\varepsilon)$ үшін (1.4) ескере отырып,

$$J(\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(0,\varepsilon) \\ y'_1(0,\varepsilon) & y'_2(0,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(0,\varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(l-1)}(0,\varepsilon) & y_2^{(l-1)}(0,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}^{(l-1)}(0,\varepsilon) \\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}(1,\varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(q-1)}(0,\varepsilon) & y_2^{(q-1)}(0,\varepsilon) & \dots & y_{n+m}^{(q-1)}(1,\varepsilon) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{10}(0)+O(\varepsilon) & \dots & y_{n0}(0)+O(\varepsilon) & y_{n+1,0}(0)+O(\varepsilon) & \dots & y_{n+m,0}(0)+O(\varepsilon) \\ y'_{10}(0)+O(\varepsilon) & \dots & y'_{n0}(0)+O(\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon}y_{n+1,0}(0)\mu_1(0)+O(\varepsilon) & \dots & \frac{1}{\varepsilon}y_{n+m,0}(0)\mu_m(0)+O(\varepsilon) \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ y_{10}^{(l-1)}(0)+O(\varepsilon) & \dots & y_{n0}^{(l-1)}(0)+O(\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon^{l-1}}y_{n+1,0}(0)\mu_1^{(l-1)}+O(\varepsilon) & \dots & \frac{1}{\varepsilon^{l-1}}y_{n+m,0}^{(l-1)}(0)\mu_m^{(l-1)}(0)+O(\varepsilon) \\ y_{10}(1)+O(\varepsilon) & \dots & y_{n0}(1)+O(\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ y'_{10}(1)+O(\varepsilon) & \dots & y'_{n0}(1)+O(\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ y_{10}^{(q-1)}(1)+O(\varepsilon) & \dots & y_{n0}^{(q-1)}(1)+O(\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

үшін $\varepsilon \to 0$ жағдайында келесі асимптотикалық сипат

$$J(\varepsilon)=(-1)^{mn_2}\frac{\pi(0)\omega(0)}{\varepsilon^{\lambda_1+mn_1}}(\overline{J}_0+O(\varepsilon)) \qquad (1.14)$$

аламыз, мұндағы $\overline{J}_0$ - III шарттағы анықтауыш және $\lambda_1=\frac{(m-1)m}{2}$, $n_2=n-n_1=q$,

$$\overline{J}_1^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{(-1)^{mn_2}\pi(0)\omega(0)}{\varepsilon^{mn_1+\lambda_1}}\left(\overline{J}_1^{(j)}(t)+\varepsilon^{n_1-j}\overline{J}_1^{(n_1)}(0)\sum_{k=1}^{m}(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_k(x)dx}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\cdot\frac{\omega_{1k}(0)}{\omega(0)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_k(x)dx}\right),\ j=\overline{0,n+m-1}.\right.$$

Ондай болса, (1.12) формулаға сәйкес $\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)$ функциясы үшін келесі түрдегі асимптотикалық сипатты аламыз:

$$\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{J_1^{(j)}(t)}{J_0}+\varepsilon^{n_1-j}\,\frac{J_1^{(n_1)}(0)}{J_0}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\,\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{1k}(0)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ j=\overline{0,n+m-1}.$$

i=1 үшін (1.12) формула дәлелденді.

Дәл осылай (1.14) формула мен $J_i^{(j)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m},\ j=\overline{0,n+m-1}$ функциялары үшін келесі асимптотикалық сипаттарды пайдаланып,

$$\overline{J}_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{(-1)^{mn_2}\pi(0)\omega(0)}{\varepsilon^{mn_1+\lambda_1}}\left(\overline{J}_i^{(j)}(t)+\varepsilon^{n_1-j}\overline{J}_i^{(n_1)}(0)\sum_{k=1}^{m}(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\cdot\frac{\omega_{1k}(0)}{\omega(0)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,n_1},\ j=\overline{0,n+m-1},\right.$$

$$\overline{J}_{n_1+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=-\frac{(-1)^{mn_2}\varepsilon^i\pi(0)\omega_i(0)}{\varepsilon^{mn_1+\lambda_1}}\left(\overline{J}_{n_1}^{(j)}(t)+(-1)^{i-1}\varepsilon^{n_1-j-1}\overline{J}_0(0)\sum_{k=1}^{m}(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\cdot\omega_{ik}(0)+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,m},\right.$$

$$\overline{J}_{n_1+m+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{(-1)^{mn_2}\pi(0)\omega(0)}{\varepsilon^{mn_1+\lambda_1}}\left(\overline{J}_{n_1+i}^{(j)}(t)+\varepsilon^{n_1-j}\overline{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)\sum_{k=1}^{m}(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\cdot\frac{\omega_{1k}(0)}{\omega(0)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,n_2}.\right.$$

Лемма 3. Айталық, I-III шарттар орындалсын. $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ шекаралық функциялары үшін $\varepsilon\to 0$ келесі асимптотикалық формуласын аламыз:

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{J_i^{(j)}(t)}{\bar{J}_0}+\varepsilon^{n_1-j}\frac{J_i^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{1k}(0)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,n_1},$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=\varepsilon^i\left(-\frac{J_{n_1}^{(j)}(t)}{\bar{J}_0}\cdot\frac{\omega_i(0)}{\omega(0)}+(-1)^i\varepsilon^{n_1-1-j}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,m},\right. \tag{1.15}$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(j)}(t)}{\bar{J}_0}+\varepsilon^{n_1-j}\frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{1k}(0)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1-j+1}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,n_2},$$

мұндағы $J_k^{(j)}(t)$ - $\bar{J}_0$ анықтауышының *к*-шы жатық жолын $y_{10}^{(j)}(t),...,y_{n0}^{(j)}(t)$ жолымен алмастырғанда шығатын *n*-ші ретті анықтауыш, $\omega_i(0)$ - $\omega(0)$ анықтауышының *i*-ші жатық жолын $\mu_1^{-1}(0),...,\mu_m^{-1}(0)$ мәндерімен алмастырғанда шығатын *m*-ретті анықтауыш, $\omega_{mk}(s)$ - $\omega(s)$ анықтауышының *m*-ші жатық жолы мен *k*-шы тік жолын сызғаннан қалған *m-1*–ші ретті анықтауыш.

$\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ шекаралық функцияларының $\varepsilon\to 0$ асимптотикалық бағалаулары келесі түрде өрнектеледі:

$$\left|\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\varepsilon^{n_1-j}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right),\ i=\overline{1,n_1},$$

$$\left|\Phi_{n_1+i}^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^i\left(1+\varepsilon^{n_1-j-1}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right),\ i=\overline{1,m},$$

$$\left|\Phi_{n_1+m+i}^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\varepsilon^{n_1-j}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right),\ i=\overline{1,n_2}.$$

1.5 Сингулярлы ауытқыған шеттік есептің аналитикалық формуласы

(1.1),(1.2) шеттік есептің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n+m}C_i\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^1 K(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds \qquad (1.16)$$

,

мұндағы $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ -шекаралық функциялар, $K(t,s,\varepsilon)$-Коши функциясы, $C_i,\ i=\overline{1,n+m}$ - белгісіз тұрақтылар және $z(t,\varepsilon)$ келесі түрдегі 2–текті Фредгольм интегралдық теңдеуінен анықталатын функция

$$z(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon)+\int_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds,$$

мұндағы

$$f(t,\varepsilon)=F(t)+\sum_{i=1}^{n+m}C_i\int_0^1\sum_{j=0}^{n_1+p}H_j(t,x)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx,$$

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_s^1\sum_{j=0}^{n_1+p}H_j(t,x)K^{(j)}(x,s,\varepsilon)dx. \qquad (1.17)$$

IV-шартқа сәйкес Фредгольм интегралдық теңдеуінің жалғыз шешімі бар және

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon) f(s,\varepsilon) ds \qquad (1.18)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы $R(t,s,\varepsilon) - H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің резольвентасы. Ал, (1.10)–асимптотикалық сипатқа сәйкес, $H(t,s,\varepsilon)$ өзегі $\varepsilon \to 0$ болғанда, шенелген екендігін көруге болады. Онда $\varepsilon \to 0$ ұмтылғанда резольвента келесі асимптотикалық сипатына ие болады:

$$R(t,s,\varepsilon) = \overline{R}(t,s) + O(\varepsilon).$$

(1.18) теңдігін (1.16) формулаға қойып, (1.1), (1.2) шеттік есептің шешімін аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} C_i Q_i(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon) \qquad (1.19)$$

,

мұндағы

$$Q_i(t,\varepsilon) = \Phi_i(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K(t,s,\varepsilon) \varphi_i(s,\varepsilon) ds,$$

$$\varphi_i(t,\varepsilon) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n_1+p} H_j(t,x,\varepsilon) \Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon) dx, \qquad (1.20)$$

$$P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K(t,s,\varepsilon) F(s,\varepsilon) ds.$$

$H_j(t,x,\varepsilon)$, $F(t,\varepsilon)$, $\varphi_i(s,\varepsilon)$ функциялары (1.15) ескере отырып, $\varepsilon \to 0$ кезде келесі түрдегі асимптотикалық сипатқа ие болады:

$$H_j(t,x,\varepsilon) = H_j(t,x) + \int_0^1 \overline{R}(t,s) H_j(s,x) ds + O(\varepsilon) \equiv \overline{H}_j(t,x) + O(\varepsilon),$$

$$F(t,\varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \overline{R}(t,s) F(s) ds + O(\varepsilon) \equiv \overline{F}(t) + O(\varepsilon), \qquad (1.21)$$

ал $\varphi_i(s,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n+m}$ функциялары үшін $O(\varepsilon)$ дәлдікпен келесі асимптотикалық формулаларын аламыз:

$$\varphi_i(s,\varepsilon)=\frac{1}{\overline{J}}\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n_1}H_j(s,x)J_i^{(j)}(x)+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}H_{n_1+k}^{(k-1)}(s,x)J_i^{(n_1+1)}(x)\right)dx+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\overline{H}_{n_1+k}^{(k-1)}(s,0)\right)\frac{J_i^{(n_1)}(0)}{J_0}+\sum_{k=2}^{p}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\overline{H}_{n_1+k}^{(j-2)}(s,1)\frac{J_i^{(n_1+k-j-1)}(1)}{J_0}+O(\varepsilon)\equiv$$

$$\equiv\overline{\varphi}_i(s)+O(\varepsilon),\qquad i=\overline{1,n_1},$$

$$\varphi_{n_1+i}(s,\varepsilon)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^{k+1}\overline{H}_{n_1+i+k}^{(k)}(s,0)+O(\varepsilon)=\overline{\varphi}_{n_1+i}(t)+O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,p},\\ \varepsilon^i\left[-\dfrac{\omega_i(0)}{\overline{J}\omega(0)}\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n_1-1}\overline{H}_j(s,x)J_{n_1}^{(j)}(x)+\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j+1}\overline{H}_{n_1+j}^{(j)}(s,x)J_{n_1}^{(n_1)}(x)\right)dx+\right.\\ \left.+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^{i+j}H_{n_1+j}^{(j)}(s,0)\frac{\omega_i(0)}{\omega(0)}+\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-k}(-1)^jH_{n_1+k+j}^{(j-1)}(s,1)\frac{\overline{J}_{n_1}^{(n_1+k)}(1)\omega_i(0)}{\overline{J}_0\omega(0)}+O(\varepsilon)\right]\equiv\\ \equiv\ \varepsilon^i\left(\overline{\varphi}_{n_1+i}(s)+O(\varepsilon)\right),\ i=\overline{p+1,m}\end{cases}$$

(1.22)

$$\varphi_{n_1+m+i}(s,\varepsilon)=\frac{1}{\overline{J}}\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n_1}H_j(s,x)J_{n_1+i}^{(j)}(x)+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}H_{n_1+k}^{(k-1)}(s,x)J_{n_1+i}^{(n_1+1)}(x)\right)dx+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\overline{H}_{n_1+k}^{(k-1)}(s,0)\right)\frac{\overline{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\overline{J}_0}+\sum_{k=2}^{p}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\overline{H}_{n_1+k}^{(j)}(s,1)\frac{J_i^{(n_1+k-j-1)}(1)}{J_0}+O(\varepsilon)\equiv$$

$$\equiv\overline{\varphi}_i(s)+O(\varepsilon),\qquad i=\overline{1,n_1},$$

(1.22) формулалардан $\varepsilon\to 0$ болғанда $\varphi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,l+p}$ функциялары келесі асимптотикалық сипатқа ие:

$$\varphi_i(s,\varepsilon)=O(1),\ i=\overline{1,n_1},$$

$$\varphi_{n_1+i}(s,\varepsilon)=\begin{cases}O(1),\ i=\overline{1,p},\\ O(\varepsilon^i),\ i=\overline{p+1,m},\end{cases}$$

$$\varphi_{n_1+m+i}(s,\varepsilon)=O(1),\ i=\overline{1,n_2}.$$

$\varphi_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,l+p}$ функцияларының асимптотикалық сипатының p қатысты ерекшелігі алдағы уақытта (1.1), (1.2) шеттік есеп шешімінің сипатында маңызды рөл атқарады.

Енді (1.2) шекаралық шарттарға (1.19) қойып, белгісіз $C_i,\ i=\overline{1,n+m}$ тұрақтыларын табу үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n+m}C_iQ_i^{(j)}(0,\varepsilon)=\alpha_j-P^{(j)}(0,\varepsilon),\ j=\overline{0,l-1},\\ \sum\limits_{i=1}^{n+m}C_iQ_i^{(j)}(1,\varepsilon)=\beta_j-P^{(j)}(1,\varepsilon)\ \ j=\overline{0,q-1}.\end{cases}\tag{1.23}$$

Осы жерден бірден $C_{i+1}=\alpha_i,\ i=\overline{0,l-1}$ анықтаймыз.

Ал, $C_{l+i},\ i=\overline{1,q}$ белгісіздерді анықтау үшін келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases}C_{l+1}(1+d_{l+1}(1,\varepsilon))+\ldots+C_{l+q}d_{l+q}(1,\varepsilon)=\beta_0-P(1,\varepsilon)-\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_{i-1}d_i(1,\varepsilon)\\ \ldots\qquad\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\ C_{l+1}d_{l+1}(1,\varepsilon)+\ldots+C_{l+q}(1+d_{l+q}(1,\varepsilon))=\beta_{q-1}-P^{(q-1)}(1,\varepsilon)-\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_{i-1}d_i^{(q-1)}(1,\varepsilon)\end{cases}\tag{1.24}$$

мұндағы

$$d_i^{(j)}(1,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^1K^{(j)}(1,s,\varepsilon)\varphi_i(s,\varepsilon)ds,\quad i=\overline{1,l+q},\quad j=\overline{0,q-1},$$

$$P^{(j)}(1,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^1 K^{(j)}(1,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds,\qquad j=\overline{0,q-1}.$$

(1.24) жүйенің $P^{(j)}(1,\varepsilon), d_i^{(j)}(1,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ коэффициенттері үшін, (1.22) сәйкес келесі асимптотикалық сипат орынды

$$d_i^{(j)}(1,\varepsilon)=(-1)^m\int_0^t\frac{W_n^{(j)}(t,s)}{W(s)A_n(s)}\varphi_i(s)ds\equiv\bar{d}^{(j)}(1)+O(\varepsilon),\ i=\overline{1,n_1}, j=\overline{0,q-1}.$$

$$d_{n_1+i}^{(j)}(1,\varepsilon)=\begin{cases}(-1)^m\int_0^1\frac{W_n^{(j)}(1,s)}{W(s)A_n(s)}\varphi_{n_1+i}(s)ds+O(\varepsilon)\equiv\\ \equiv\bar{d}_i^{(j)}(1)+O(\varepsilon),\quad j=\overline{0,q-1},\ i=\overline{1,p},\\ \varepsilon^i\left((-1)^m\int_0^1\frac{W_n^{(j)}(1,s)}{W(s)A_n(s)}\varphi_{n_1+i}(s)ds+O(\varepsilon)\right)\equiv\\ \equiv\varepsilon^i\left(\bar{d}_i^{(j)}(1)+O(\varepsilon)\right),\quad j=\overline{0,q-1},i=\overline{p+1,m},\end{cases}\tag{1.25}$$

$$d_{n_1+m+i}^{(j)}(1,\varepsilon)=(-1)^m\int_0^t\frac{W_n^{(j)}(t,s)}{W(s)A_n(s)}\varphi_{n_1+m+i}(s)ds\equiv\bar{d}_{n_1+m+i}^{(j)}(1)+O(\varepsilon),$$

$$i=\overline{1,n_2}, j=\overline{0,q-1},$$

$$P^{(j)}(1,\varepsilon)=(-1)^m\int_0^t\frac{W_n^{(j)}(t,s)}{W(s)A_n(s)}\bar{F}(s)ds+O(\varepsilon)\equiv\bar{P}^{(j)}(1)+O(\varepsilon),\ j=\overline{0,q-1}.$$

Онда (1.24) жүйенің шешімінен, V шартты ескере отырып, $C_{l+i},\ i=\overline{1,q}$ үшін келесі асимптотикалық сипатты аламыз:

$$C_{l+i}=\bar{C}_{l+i}+O(\varepsilon),\ i=\overline{1,q},\tag{1.26}$$

мұндағы

$$\overline{C}_{l+i}=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left[\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+i}\overline{\Delta}_{ki}\left(\beta_{k-1}-P^{(k-1)}(1)-\sum_{j=1}^{n_1+p}\alpha_{j-1}\overline{d}_j^{(k-1)}(1)+\sum_{j=l+1}^{l+q}\alpha_{j-1}\overline{d}_j^{(k-1)}(1)\right),\right.$$

$$\left.i=\overline{1,q}\right. \tag{1.27}$$

$\overline{\Delta}_{ki}$ $-\overline{\Delta}$ анықтауышының k-жатық жол мен i-бағанды алып тастағандағы анықтауыш.

Онда келесі теорема орынды.

Теорема 1. Айталық, I-V шарттар орындалсын. Онда [0,1] кесіндісінде (1.1), (1.2) шеттік есептің шешімі бар, жалғыз және

$$y^{(j)}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_{i-1}Q_i^{(j)}(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{q}\overline{C}_{l+i}Q_{l+i}^{(j)}(t,\varepsilon)+P^{(j)}(t,\varepsilon),\quad j=\overline{0,n+m-1} \tag{1.28}$$

формуласымен анықталады, мұндағы

$$\begin{aligned}Q_i(t,\varepsilon)&=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\varphi_i(s,\varepsilon)ds,\\ P(t,\varepsilon)&=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds.\end{aligned} \tag{1.29}$$

1.6 **Шешімнің асимптотикалық бағалауы**

Теорема 2. Айталық, I-V шарттар орындалсын. Онда (1.1), (1.2) шеттік есебінің шешімі үшін $\varepsilon\to 0$ келесі асимптотикалық бағалаулар орынды:

$$\begin{aligned}|y^{(j)}(t,\varepsilon)|\le C\Bigg[&\sum_{i=1}^{n_1}|\alpha_{i-1}|+\sum_{i=1}^{q}|\beta_{i-1}|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)+\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{i-1}\overline{\varphi}_i(t)+\\ &+\left(\sum_{i=1}^{p}|\alpha_{n_1+i-1}|+\varepsilon^i\sum_{i=p+1}^{m}|\alpha_{n_1+i-1}|\right)\overline{\varphi}_{n_1+i}(t)+\sum_{i=1}^{q}\beta_{i-1}\overline{\varphi}_{n_1+m+i}(t)\Bigg]+\\ &+C\varepsilon^{n_1-j}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n_1}|\alpha_{i-1}|+\sum_{i=1}^{q}|\beta_{i-1}|\right)\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{\mu_k^j(t)\omega_{1k}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right|+\right.\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i-1}\,|\,\alpha_{n_1+i-1}\,|\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+i}\,\frac{\mu_k^{j}(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right|+$$

$$+\varepsilon^{q}\,|\,F(t)\,|\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}\,\frac{\mu_k^{j}(t)\omega_{mk}(0)}{\mu_k^{n+1}(0)\omega(0)}\right|\Bigg],\ j=\overline{0,n+m-1},$$

мұндағы $\overline{\varphi}_i(t),\ i=\overline{1,n+m}$ (1.22) формулаларымен өрнектеледі, $\omega(s)$ Вандермонд анықтауышы

$$\omega(s)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \mu_1(s) & \mu_2(s) & \ldots & \mu_m(s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mu_1^{m-1}(s) & \mu_2^{m-1}(s) & \ldots & \mu_m^{m-1}(s)\end{vmatrix}$$

түрінде болады, $\omega_{mk}(s)-\ \omega(s)$ анықтауышының $m-$ жатық жол мен k-бағанды алып тастағандағы анықтауыш. Олай болса,

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+i}\,\frac{\mu_k^{j}(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\Bigg|_{t=0}\equiv 0,\ \ j=\overline{n_1+i,n_1+m-1},\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}\,\frac{\mu_k^{j}(t)\omega_{mk}(0)}{\mu_k^{n+1}(0)\omega(0)}\Bigg|_{t=0}\equiv 0,\ \ j=\overline{n_1+i,n_1+m-1},\qquad(1.31)$$

тепе теңдіктердің орынды екендігін айта кеткен жөн.

Дәлелдеуі. (1.10), (1.15) және (1.22) формулаларының көмегімен $\varepsilon\to 0$ ұмтылғанда, (1.29) формула арқылы $Q_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n+m}$ және $P(t,\varepsilon)$ функциялары үшін асимптотикалық сипаттар аламыз:

$$Q_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{J_i^{(j)}(t)}{J_0}+(-1)^m\int_0^t\frac{W_n^{(j)}(t,s)}{W(s)A_n(s)}\,\overline{\varphi}_i(s)ds+\varepsilon^{n_1-j}\,\frac{J_i^{(n_1)}(0)}{J_0}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{m}(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\,\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^{j}(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\,\frac{\omega_{1k}(0)}{\omega(0)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,n_1},$$

$$Q_{n_1+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=\begin{cases}(-1)^m\int\limits_0^t\dfrac{\overline{W}_n^{(j)}(t,\varepsilon)}{\overline{W}(s)A_n(s)}\overline{\varphi}_{n_1+i}(s)ds+\\ +\varepsilon^{n_1-1+i-j}\cdot\sum\limits_{k=1}^m(-1)^{k+i}\dfrac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}+\\ +O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+i-j}\sum\limits_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}\right),\ i=\overline{1,p},\\ \varepsilon^i\left(-\dfrac{J_{n_1}^{(j)}(t)}{\overline{J}_0}\dfrac{\omega_i(0)}{\omega(0)}+(-1)^m\int\limits_0^t\dfrac{\overline{W}_n^{(j)}(t,\varepsilon)}{\overline{W}(s)A_n(s)}\overline{\varphi}_{n_1+i}(s)ds+\right.\\ +\varepsilon^{n_1-j-1}\dfrac{\overline{J}_i^{(n_1)}(0)}{\overline{J}_0}\cdot\sum\limits_{k=1}^m(-1)^{k+i}\dfrac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}+\\ \left.+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1-j}\sum\limits_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}\right),\quad i=\overline{p+1,m},\right.\end{cases}$$

(1.32)

$$Q_{n_1+m+i}^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{J_{n_1+i}^{(j)}(t)}{\overline{J}_0}+(-1)^m\int\limits_0^t\frac{\overline{W}_n^{(j)}(t,s)}{\overline{W}(s)A_n(s)}\overline{\varphi}_{n_1+m+i}(s)ds+\varepsilon^{n_1-j}\frac{\overline{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\overline{J}_0}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^m(-1)^k e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n_1}(0)}\frac{\omega_{1k}(0)}{\omega(0)}+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n_1+1-j}\sum_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_k(x)dx}\right),$$

$$i=\overline{1,q}\,,$$

$$P^{(j)}(t,\varepsilon)=(-1)^m\int_0^t\frac{\overline{W}_n^{(j)}(t,s)}{\overline{W}(s)A_n(s)}\overline{F}(s)ds+$$

$$+\varepsilon^{n-j}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}(-1)^{m+k}\frac{y_{n+k,0}(t)\mu_k^j(t)}{y_{n+k,0}(0)\mu_k^{n+1}(0)}\frac{\omega_{mk}(0)}{\omega(0)}\overline{F}(0)+$$

$$+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{n-j+1}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_k(x)dx}\right).$$

Онда, Теорема 2 дәлелдеуі, (1.1),(1.2) шеттік есептің шешімінің (1.28) формуласы мен (1.32) өрнектерден тікелей шығады.

(1.30) бағалаудан келесі түрдегі туындының өсу сипатын аламыз:

$$y^{(i)}(0,\varepsilon)=O(1),\ i=\overline{0,n_1+m-1}$$

$$y^{(n_1+m)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^m}\right),\qquad(1.33)$$

...,

$$y^{(n+m-1)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m+q-1}}\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Онда *t=0* нүктесінде (1.1), (1.2) сингулярлы ауытқыған шеттік есептің шешімі *m-дәрежелі* n_1 *–ші ретті бастапқы секіріске* ие деген қорытындыға келеміз.

1.7 **Өзгертілген ауытқымаған есеп**

Енді, $\bar{y}(t)$ арқылы белгіленген, ауытқымаған есептің шешімін анықтайық. Алайда, ешқандай қосымша шартсыз, біз ауытқымаған есепті тұжырымдай алмаймыз. Мұндай қосымша шарттарды Теорема 2, (1.30) бағалауынан, сондай-ақ, (1.33) формулада көрсетілген туындылардың өсу сипатынан алуға болады.

(1.1)-теңдеуінің оң жағындағы интеграл астында туындының реті n_1+p болғандықтан, және (1.33) сипатқа сәйкес бұл туынды $\varepsilon\to 0$ ұмтылғанда $t=0$ нүктесінде шексіздікке ұмтылады, онда ауытқымаған есеп ретінде (1.1)-теңдеуден $\varepsilon\to 0$ ұмтылғанда алынған қарапайым ауытқымаған есепті ала алмаймыз. Себебі, қарапайым ауытқымаған есепті интеграл астына енген

туынды $\varepsilon \to 0$ болғанда шенелген болса ғана алуға болады. Сәйкесінше, ауытқымаған есеп шешімі қандайда бір өзгертілген ауытқымаған есепті қанағаттандыру қажет. Сол себепті, ауытқымаған есепті келесі түрде құрастырған жөн болады

$$L_0\bar{y} \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(t)\frac{d^k\bar{y}}{dt^k} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+p} H_i(t,x)\bar{y}^{(i)}(x)dx + \sum_{k=1}^{p}\Delta_k(t), \quad (1.34)$$

мұндағы белгісіз $\Delta(t)$ функциясы *интегралдық мүшенің бастапқы секірісі* деп аталады. Енді (1.34) теңдеу үшін шекаралық шарттарды анықтайық.

$\alpha_i,\ i=\overline{0,n_1-p}$ және $\beta_i,\ i=\overline{0,q-1}$ коэффициенттері $O(1)$ ретке ие, яғни $\varepsilon \to 0$ болғанда шенелген. Сондықтан, (1.34) теңдеу үшін бұл шарттарды қалдырамыз. (1.1), (1.2) есептің шешімінің *t=0* нүктесінде p-дәрежелі n_1- ретті бастапқы секіріс құбылысына ие екендігін ескеріп, ауытқымаған есептің бастапқы шарттарына $\alpha_{n_1+i-1}+\Delta_i,\ i=\overline{1,p}$ бастапқы мәндерін енгіземіз. Себебі, $\bar{y}^{(n_1+i-1)}(0),\ i=\overline{1,p}$ мәні $\bar{y}^{(n_1+i-1)}(0,\varepsilon)=\alpha_{n_1+i-1},\ i=\overline{1,p}$ мәнімен сәйкес келмейтіндігін көрсетеді, яғни әзірге белгісіз $\Delta_i,\ i=\overline{1,p}$ шамаларға секіреді. мұндағы Δ_i – $\bar{y}^{(i)}(t),\ i=\overline{n_1,n_1+m-1}$ шешімінің $t=0$ нүктесінде *бастапқы секірісі* деп аталады.

Онда, (1.34) ауытқымаған есеп келесі шекаралық шарттармен шешіледі

$$\begin{aligned}
&\bar{y}^{(i)}(0)=\alpha_i,\ \ i=\overline{0,n_1-1},\\
&\bar{y}^{(n_1+i-1)}(0)=\alpha_{n_1+i-1}+\Delta_i,\ \ i=\overline{1,p},\\
&\bar{y}^{(i)}(1)=\beta_i,\ \ i=\overline{0,q-1},
\end{aligned} \quad (1.35)$$

(1.34)–теңдеудегі $\Delta(t)$–функциясын табу үшін келесі белгілеуді енгіземіз

$$\begin{aligned}
u(t,\varepsilon) &= y(t,\varepsilon)-\bar{y}(t),\\
y(t,\varepsilon) &= u(t,\varepsilon)+\bar{y}(t)
\end{aligned} \quad (1.36)$$

(1.36) белгілеуді (1.1), (1.2) есебіне апарып қоямыз, мұндағы $y(t,\varepsilon)$

сингулярлы ауытқыған (1.1), (1.2) шеттік есебінің шешімі, ал $\bar{y}(t)$ өзгертілген ауытқымаған теңдеу үшін (1.34), (1.35) түріндегі шеттік есебінің шешімі. (1.34), (1.35) ескере отырып, біз $u(t,\varepsilon)$ үшін сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық теңдеуді

$$L_\varepsilon u = f(t,\varepsilon) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+p} H_i(t,x)u^{(i)}(x,\varepsilon)dx - \Delta(t) \tag{1.37}$$

шекаралық шарттарымен аламыз:

$$\begin{aligned} &u^{(i)}(0,\varepsilon) = 0, \ \ i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ &u^{(n_1+i-1)}(0,\varepsilon) = -\Delta_i, \ \ i = \overline{1, p}, \\ &u^{(n_1+i-1)}(0,\varepsilon) = \alpha_{n_1+i-1} - \bar{y}^{(n_1+i-1)}(1), \ i = \overline{p+1, m} \\ &u^{(i)}(1,\varepsilon) = 0, \ \ i = \overline{0, q-1}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

мұндағы

$$f(t,\varepsilon) = -(\varepsilon^m \bar{y}^{(n+m)} + ... + \varepsilon A_{n+1}(t)\bar{y}^{(n+1)}) = O(\varepsilon).$$

(1.37), (1.38) есебі (1.1), (1.2) есепке бірдей типті есеп болғандықтан, онда (1.37), (1.38) есебінің шешіміне (1.30) бағалауды қолдануға болады, онда (1.22) асимптотикалық сипаттарға сәйкес $\varepsilon \to 0$ болғанда,

$$|u^{(j)}(t,\varepsilon)| \le C\left[\max_{0\le t\le 1} |\Delta_p(t) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i-1}\bar{\varphi}_i(t)| + \varepsilon\right] +$$

$$+ C\varepsilon^{n_1-j} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\left[\left(\sum_{i=1}^{p}\varepsilon^{i-1}|\Delta_i| + \sum_{i=p+1}^{m}\varepsilon^{i-1}|\alpha_{n_1+i-1}\bar{y}^{(n_1+i-1)}(1)|\right)\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+i}\frac{\mu_k^j(t)\omega_{ik}(0)}{\mu_k^{n_1}(0)\omega(0)}\right| +\right.$$

$$\left. + \varepsilon^q |\Delta_p(t)|\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}\frac{\mu_k^j(t)\omega_{mk}(0)}{\mu_k^{n+1}(0)\omega(0)}\right|\right], \ j = \overline{0, n+m-1}, \tag{1.39}$$

асимптотикалық сипаттарын аламыз. (1.39) бағалаудан $u^{(j)}(t,\varepsilon), \ j = \overline{0, n+m-1}$ шешімі $\varepsilon \to 0$ ұмтылғанда нөлге ұмтылатындығы

шығады, егер $\Delta(t)$ интегралдық мүшенің бастапқы секірісі келесі формуламен анықталса

$$\Delta(t)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{p-i}(-1)^k\,\overline{H}^{(k)}_{n_1+i+k}(t,0)\right)\Delta_i. \tag{1.40}$$

Онда келесі теорема орынды.

Теорема-6. I-V шарттар және (1.40) теңдік орындалсын. Онда, жеткілікті аз ε үшін сингулярлы ауытқыған (1.1), (1.2) шеттік есеп шешімі үшін

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon)=\bar{y}^{(j)}(t),\quad j=\overline{0,n_1-1},\ 0\le t\le 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon)=\bar{y}^{(j)}(t),\quad j=\overline{n_1,n+m-1},\ 0< t\le 1$$

Шектік көшулері орынды, мұндағы $\bar{y}(t)$– өзгертілген ауытқымаған (1.34), (1.35) шеттік есебінің шешімі.

1.8 Мысал

Сингулярлы ауытқыған сызықты біртекті дифференциалдық теңдеу қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y^{IV}+3\varepsilon y'''+2y''=1+\delta\int_0^1 y'''(x)dx \tag{1.41}$$

$$y^{(i)}(0,\varepsilon)=\alpha_i,\ i=\overline{0,2},\ y(1,\varepsilon)=\beta. \tag{1.42}$$

мұндағы, $n_1=1,\ n_2=1,\ n=2,\ m=2,\ l=3, p=2.$

(1.41) теңдеу үшін біртекті теңдеудің

$$\varepsilon^2 y^{IV}+3\varepsilon y'''+2y''=0, \tag{1.43}$$

іргелі шешімдер жүйесі келесі түрде болады

$$y_1(t,\varepsilon)=e^{-\frac{2}{\varepsilon}t},\ y_2(t,\varepsilon)=e^{-\frac{1}{\varepsilon}t},\ y_3(t,\varepsilon)=1,\ y_4(t,\varepsilon)=t. \tag{1.44}$$

Онда (1.43) біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі келесі түрге ие:

$$y_1(t,\varepsilon) = C_1 e^{-\frac{2}{\varepsilon}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + C_3 + C_4 t\,. \tag{1.45}$$

(1.41) теңдеудің оң жағын белгілеп алайық

$$z = 1 + \delta \int_0^1 y'''(x)dx\,. \tag{1.46}$$

Онда (1.41) сингулярлы ауытқыған теңдеу келесі түргде аламыз:

$$\varepsilon^2 y^{IV} + 3\varepsilon y''' + 2y'' = z\,. \tag{1.47}$$

Бұл сызықты біртекті теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = \frac{z}{4}t^2 \tag{1.48}$$

түрінде өрнектеледі. (1.45), (1.48) алынған шешімнің түрлерін пайдалана отырып, (1.47) теңдеудің келесі түрдегі жалпы шешімін аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = C_1 e^{-\frac{2}{\varepsilon}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + C_3 + C_4 t + \frac{z}{4}t^2 \tag{1.49}$$

мұндағы, z және C_i, $i = 1,...4$ әзірге белгісіз. (1.49) шешімнің үшінші ретті туындысын (1.46) теңдікке қойып, z белгісізді тауып аламыз

$$\begin{aligned} z &= 1 + \delta \int_0^1 \left(-\frac{8}{\varepsilon^3} C_1 e^{-\frac{2}{\varepsilon}x} - \frac{1}{\varepsilon^3} C_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}x} \right) dx \\ z &= 1 + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(4C_1 \left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1 \right) + C_2 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right) \right). \end{aligned} \tag{1.50}$$

(1.50) алынған z мәнін (1.49) шешімге апарып қойып, (1.41), (1.42) шеттік есеп үшін келесі шешімді аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = C_1 \left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}t} + \frac{\delta t^2}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1 \right) \right) + C_2 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \frac{\delta t^2}{4\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right) \right) + C_3 + C_4 t + \frac{t^2}{4} \tag{1.51}$$

C_i, $i = \overline{1,4}$ белгісіз тұрақтыларды табу үшін, (1.51) шешімді және оның туындыларына (1.42) шекаралық шарттарын қолданып, келесі теңдеулер

жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \alpha_0 \\ -\frac{2}{\varepsilon}C_1 - \frac{1}{\varepsilon}C_2 + C_4 = \alpha_1 \\ C_1\left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2\delta}{\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right)\right) + C_2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\delta}{2\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)\right) = \alpha_2 - 0{,}5 \\ C_1\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right)\right) + C_2\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\delta}{4\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)\right) + C_3 + C_4 = \beta - 0{,}25 \end{cases}$$

Бұл жүйедегі $C_3,\ C_4$ белгісіз тұрақтыларын өрнектеп алсақ:

$$C_3 = \alpha_0 - C_1 - C_2$$
$$C_4 = \alpha_1 + \frac{2}{\varepsilon}C_1 + \frac{1}{\varepsilon}C_2,$$

онда қалған екі теңдеуден жүйе құрылады

$$\begin{cases} C_1\left(4 + 2\delta\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right)\right) + C_2\left(1 + \frac{\delta}{2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)\right) = \varepsilon^2(\alpha_2 - 0{,}5) \\ C_1\left(\left(\varepsilon^2 + \delta\right)\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right) + 2\varepsilon\right) + C_2\left(\left(\varepsilon^2 + \frac{\delta}{4}\right)\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right) + \varepsilon\right) = \varepsilon^2\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1}{4}\right) \end{cases} \tag{1.52}$$

(1.52) теңдеулер жүйесінің бас анықтауышының асимптотикалық сипаты келесі түрде болады:

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^4}\left\{\left(4 + 2\delta\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right)\right)\cdot\left[\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)\left(\varepsilon^2 + \frac{\delta}{4}\right) + \varepsilon\right] - \right.$$
$$\left.\left(1 + \frac{\delta}{2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)\right)\cdot\left[\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right)\left(\varepsilon^2 + \delta\right) + 2\varepsilon\right]\right\} \neq 0$$

Ондай болса, (1.52) теңдеулер жүйесінен $C_i,\ i = \overline{1,2}$ тұрақты шамалары бірмәнді табылады және олардың асимптотикалық сипаты келесі түрде анықталады:

$$C_1=\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}} \tag{1.53}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^3}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}$$

$$C_3=\alpha_0-\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}-$$

$$-\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}$$

$$C_4=\alpha_1+\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^3}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}$$

аламыз. Егер $\varepsilon\to 0$, онда

$$C_1\to 0,\ C_2\to 0,\ C_3\to\alpha_0,$$

$$C_3\to\beta-\alpha_0-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}.$$

(1.53) алынған өрнектерді (1.51) формулаға апарып қойып, (1.41), (1.42) шеттік есептің келесі түрдегі шешімін аламыз:

$$y(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}t}+\frac{\delta t^2}{\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-1\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}t}+\frac{\delta t^2}{\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-1\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^3}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}+\frac{\delta t^2}{4\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}+\frac{\delta t^2}{4\varepsilon^2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\right)\right)+$$

$$+\alpha_0-\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}-$$

$$-\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\alpha_1 t+\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon\left[\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)+\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}-\beta+\alpha_0+\alpha_1\right)-\beta+\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{4}\right]}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{t}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon\left(-1+(2\delta-4)(\alpha_0+\alpha_1-\beta)+\delta\alpha_2\right)-(2\alpha_2-1)\varepsilon^2+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^3}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{t}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\left(2\delta\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)-\varepsilon^2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\right)}{2-\delta+\left(\frac{3}{2}\delta-3\right)\varepsilon+\left(\delta-\delta\varepsilon+4\varepsilon^2-\frac{3}{2}\delta\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\left(-\delta+2\delta\varepsilon-\varepsilon^2-\frac{3\delta}{2}\varepsilon^2\right)\frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon}+\frac{3\delta}{2}\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}}+\frac{t^2}{4}$$

(1.54)

Бұдан

$$y(0,\varepsilon)=O(1),\ \ y'(0,\varepsilon)=O(1), y''(0,\varepsilon)=O(1),\ y'''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\ \ \varepsilon\to 0 \qquad (1.55)$$

екендігі шығады. Бұл (1.41), (1.42) шеттік есептің *t=0* нүктесінде 2 дәрежелі бірінші ретті бастапқы секіріске ие екендігін көрсетеді.

Енді (1.41),(1.42) шеттік есебіне сәйкес келесі түрдегі өзгертілген ауытқымаған есеп қарастырамыз:

$$2\bar{y}''=1+\delta\int_0^1 \bar{y}'''(x)dx+\delta\Delta_2 \qquad (1.56)$$

$$y(0)=\alpha_0,\ \ \bar{y}'(0)=\alpha_1+\Delta_1,\ \ \bar{y}''(0)=\alpha_2+\Delta_2,\ \ y(1)=\beta. \qquad (1.57)$$

(1.56), (1.57) шеттік есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$\bar{y}(t)=\frac{1+\delta\Delta_2}{4}t^2+(\alpha_1+\Delta_1)t+\alpha_0.$$

мұндағы, Δ_1,Δ_2 шешімнің бастапқы секірістері келесі формуламен анықталады:

$$\Delta_1=\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)},$$

$$\Delta_2=\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}.$$

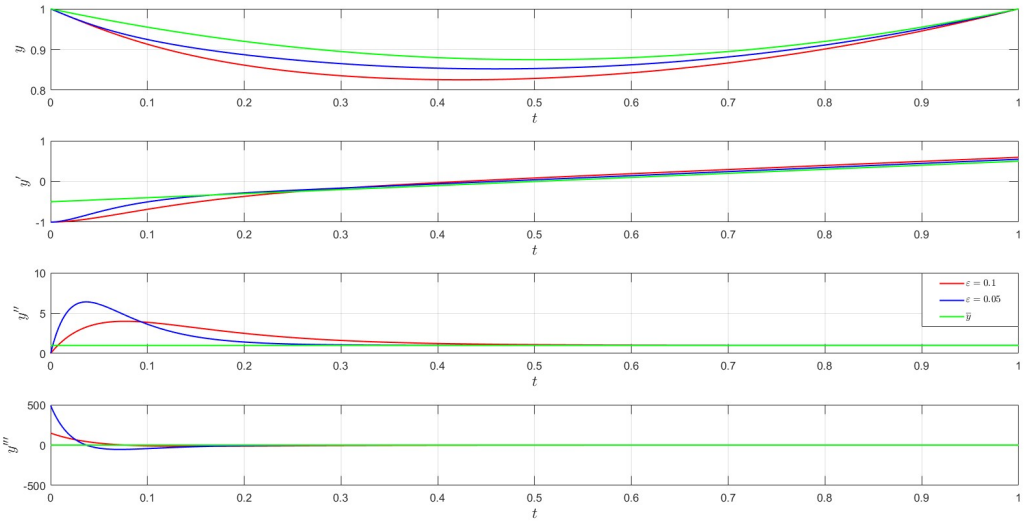
Ондай болса (1.56), (1.57) өзгертілген ауытқымаған есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі:

$$y(t)=\frac{1-\delta\alpha_2}{2-\delta}\cdot\frac{t^2}{2}+\left(\beta-\alpha_0-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)t+\alpha_0. \qquad (1.58)$$

Алынған нәтижелерден келесі шектік көшу орынды екенін көруге болады

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon)=y(t),\quad 0\le t\le 1,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon)=y^{(i)}(t),\ \ i=1,2,3,\quad 0<t\le 1.$$

Сандық мысал: $\delta = 1,\ \alpha_0 = -1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta = 1, \Delta_0 = 0.5, \Delta_1 = 1.$



Сурет 3. Қызыл, жасыл және көк сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0{,}1;\ 0{,}05$ мәндерінде (1.41), (1.42) есеп шешімін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (1.56), (1.57) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.

2 СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ–ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖІКТЕЛУІ

2.1 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі

Келесі түрдегі сингулярлы ауытқыған жоғарғы ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті қарастырайық

$$L_\varepsilon y = \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{r+n} y}{dt^{r+n}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n_1+p} H_j(t,x) y^{(j)}(x,\varepsilon) dx, \; p = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} h_{i+1} y(t,\varepsilon) &\equiv y^{(i)}(0,\varepsilon) = \alpha_i, \;\; i = \overline{0,l-1}, \\ h_{l+1+i} y(t,\varepsilon) &\equiv y^{(i)}(1,\varepsilon) = \beta_i, \;\; i = \overline{0,q-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, α_i, β_i – белгілі тұрақтылар, $A_{n+m}(t) = 1, \;\; m+n = l+q$.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t) \in C^{n+m-1}([0,1]), \quad i = \overline{0,n+m}, \quad F(t) \in C([0,1]), \qquad H_i(t,x) \in C^{m-1}(D),$

$i = \overline{0,n_1+p}, \quad D = (0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1)$.

II. Қосымша сипаттауыш $\mu^m(t) + A_{m+n-1}(t)\mu^{m-1}(t) + \ldots + A_n(t) = 0$ теңдеуі m теріс әртүрлі түбірлерге ие және $m < l, \; l - m = n_1$.

III.

$$\overline{J}_0 = \begin{vmatrix} h_1 y_{10}(t) & h_1 y_{20}(t) & \ldots & h_1 y_{n0}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n_1} y_{10}(t) & h_{n_1} y_{20}(t) & \ldots & h_{n_1} y_{n0}(t) \\ h_{l+1} y_{10}(t) & h_{l+1} y_{20}(t) & \ldots & h_{l+1} y_{n0}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n+m} y_{10}(t) & h_{n+m} y_{20}(t) & \ldots & h_{n+m} y_{n0}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

IV. 1 саны ε параметрінің жеткілікті аз мәнінде $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

V.

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} 1+\overline{d}_{l+1}(1) & \overline{d}_{l+2}(1) & \dots & \overline{d}_{l+q}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{d}_{l+1}^{(q-1)}(1) & \overline{d}_{l+2}^{(q-1)}(1) & \dots & 1+\overline{d}_{l+q}^{(q-1)}(1) \end{vmatrix}\neq 0,$$

мұндағы $\overline{d}_{l+i}^{(j)}(1)$, $i=\overline{1,q}$, $j=\overline{0,q-1}$ (2.1) теңдеудің коэффициенттері арқылы өрнектеледі.

1-тараудағы, Теорема 6 $j=\overline{n_1,n+m-1}$ мәні үшін шектік көшу $0\le t\le 1$ кесіндісінде t бойынша бірқалыпты емес екендігін байқадық.

Бұл тарауда, (2.1), (2.2) шеттік есебінің $y(t,\varepsilon)$ шешіміне, кіші параметр бойынша кез–келген дәлдікте бірқалыпты асимптотикалық жуықтау алгоритмі беріледі.

(2.1), (2.2) сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп n_1-ретті бастапқы секіріске ие болғандықтан ((1.33) формуланы қараңыз), (2.1), (2.2) шеттік есебінің асимптотикалық шешімін

$$y(t,\varepsilon)=y_\varepsilon(t)+\varepsilon^{n_1}w_\varepsilon(\tau),\ \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

түрінде іздейміз, мұндағы, $y_\varepsilon(t)$ - *регулярлы бөлік* және $w_\varepsilon(\tau)$ *шекаралық қабатты бөлік,* олар сәйкесінше келесі түрде өрнектеледі

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t)&=y_0(t)+\varepsilon\, y_1(t)+\dots, \\ w_\varepsilon(\tau)&=w_0(\tau)+\varepsilon\, w_1(\tau)+\dots \end{aligned} \tag{2.4}$$

мұндағы $w_k(\tau)$ функциялары *шекаралық қабатты типті функциялар* деп аталады.

(2.3) өрнекті (2.1) теңдеуге қойып,

$$A_0(t)\left(y_\varepsilon(t)+\varepsilon^{n_1}w_\varepsilon(\tau)\right)+A_1(t)\left(y'_\varepsilon(t)+\varepsilon^{n_1-1}w_\varepsilon(\tau)\right)+\dots+A_{n_1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n_1)}(t)+\overset{(n_1)}{w}{}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+A_{n_1+1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n_1+1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\overset{(n_1+1)}{w}{}_\varepsilon(\tau)\right)+\dots+A_n(t)\left(y_\varepsilon^{(n)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2}}\overset{(n)}{w}{}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+\varepsilon A_{n+1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n+1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+1}}\overset{(n+1)}{w}{}_\varepsilon(\tau)\right)+\dots+\varepsilon^{m-1}A_{n+m-1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n+m-1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m-1}}\overset{(n+m-1)}{w}{}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+\varepsilon^m\left(y_\varepsilon^{(n+m)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m}}\overset{(n+m)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)y_\varepsilon^{(i)}(x)dx+$$

$$+\int_0^1\sum_{i=1}^{n_1+p}\varepsilon^{n_1-i}H_i(t,x)\overset{(i)}{w}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx. \tag{2.5}$$

мұндағы (i) шеткі және жоғарғы индекс $i-$ретті сәйкесінше t және τ-дан тәуелді туындыны білдіреді.

Оң жағындағы интегралдық мүшені бөліп қарастырайық

$$I=\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)\varepsilon^{n_1-i}w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

Сәйкесінше, теңдеудің оң жағындағы екінші интегралға $\frac{x}{\varepsilon}=s$ алмастыруын жасап және жоғарғы шек $\frac{1}{\varepsilon}$ –ді ∞-ке ауыстырып, t және τ-дан тәуелді мүшелерді теріп жазу арқылы келесі өрнекті аламыз

$$I=\int_0^\infty\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,\varepsilon s)\varepsilon^{n_1-i+1}\overset{(i)}{w}_\varepsilon(s)ds,$$

Бұдан (2.5)-өрнек келесі түрге ие болады:

$$A_0(t)\left(y_\varepsilon(t)+\varepsilon^{n_1}w_\varepsilon(\tau)\right)+A_1(t)\left(y'_\varepsilon(t)+\varepsilon^{n_1}\dot{w}_\varepsilon(\tau)\right)+\ldots+A_{n_1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n_1)}(t)+\varepsilon^{n_1}\overset{(n_1)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+A_{n_1+1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n_1+1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\overset{(n_1+1)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)+\ldots+A_n(t)\left(y_\varepsilon^{(n)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2}}\overset{(n)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+\varepsilon A_{n+1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n+1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+1}}\overset{(n+1)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)+\ldots+\varepsilon^{m-1}A_{n+m-1}(t)\left(y_\varepsilon^{(n+m-1)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m-1}}\overset{(n+m-1)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)+$$

$$+\varepsilon^m\left(y_\varepsilon^{(n+m)}(w)+\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m}}\overset{(n+m)}{w}_\varepsilon(\tau)\right)=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)y_\varepsilon^{(i)}(x)dx+$$

$$+\int_0^\infty\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,\varepsilon s)\varepsilon^{n_1+1-i}\overset{(j)}{w}_\varepsilon(s)ds. \tag{2.6}$$

(2.5) өрнекті (2.2) шекаралық шарттарға қоямыз:

$$y_\varepsilon^{(i)}(0)+\varepsilon^{n_1-i}\overset{(i)}{\omega}_\varepsilon(0)=\alpha_i,\ i=\overline{0,l-1},$$
$$y_\varepsilon^{(i)}(1)+\varepsilon^{n_1-i}\overset{(i)}{\omega}_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\beta_i,\ i=\overline{0,q-1}.$$

$w_k(\tau)$ шекаралық қабатты типті функция болғандықтан, онда $\varepsilon\to 0$, болғанда $w_k\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\to 0$. Сәйкесінше, шекаралық шарттар келесі формада болады:

$$\begin{aligned}&y_\varepsilon^{(i)}(0)+\varepsilon^{n_1-i}\overset{(i)}{\omega}_\varepsilon(0)=\alpha_i,\ i=\overline{0,l-1},\\&y_\varepsilon^{(i)}(1)=\beta_i,\ i=\overline{0,q-1}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.6)-қатарды (2.7)-формулаға қой

$$y_0^{(i)}(0)+\varepsilon y_1^{(i)}(0)+\ldots+\varepsilon^{n_1-i}(\overset{(i)}{w_0}(0)+\varepsilon\overset{(i)}{w_1}(0)+\ldots)=\alpha_i,\quad i=\overline{0,l-1}, \tag{2.8}$$

$$y_0^{(i)}(1)+\varepsilon y_1^{(i)}(1)+\ldots=\beta_i,\quad i=\overline{0,q-1}. \tag{2.9}$$

(2.8) шарттан $i=\overline{n_1+1,n_1+m-1}$ мәндері үшін келесі тепе–теңдік орындалатыны шығады:

$$\overset{(i)}{w_k}(0)=0,\ k=\overline{0,i-(n_1+1)} \tag{2.10}$$

Енді (2.6) теңдеудегі t және τ айнымалыларына тәуелді бөліктерін бөліп жазып, $y_\varepsilon(t),\ w_\varepsilon(\tau)$ функцияларын анықтайтын теңдеулерді аламыз:

$$\sum_{r=1}^m\varepsilon^r A_{n+r}(t)y_\varepsilon^{(n+r)}+\sum_{k=0}^n A_k(t)y_\varepsilon^{(k)}=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)y_\varepsilon^{(i)}(x)dx+$$

$$+\int_0^{\infty}\sum_{i=0}^{n_1+p}\varepsilon^{n_1+1-i}H_i(t,\varepsilon s)\overset{(i)}{w}_{\varepsilon}(s)ds \qquad (2.11)$$

және $w_{\varepsilon}(\tau)$ үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$\overset{(n+m)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+A_{n+m-1}(\varepsilon\tau)\overset{(n+m-1)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+A_{n+m-2}(\varepsilon\tau)\overset{(n+m-2)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+...+$$

$$+A_{n+1}(\varepsilon\tau)\overset{(n+1)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+A_n(\varepsilon\tau)\overset{(n)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+\varepsilon A_{n-1}(\varepsilon\tau)\overset{(n-1)}{w}_{\varepsilon}(\tau)+...+ \qquad (2.12)$$

$$+\varepsilon^{n-1}A_1(\varepsilon\tau)\dot{w}_{\varepsilon}(\tau)+\varepsilon^n A_0(\varepsilon\tau)w_{\varepsilon}(\tau)=0.$$

Енді $H_i(t,\varepsilon),\quad i=\overline{0,n_1+p}$ функцияларын келесі түрдегі Тейлор қатарына жіктеп,

$$H_i(t,\varepsilon s)=H_i(t,0)+\varepsilon sH'_i(t,0)+\frac{(\varepsilon s)^2}{2!}H_i''(t,0)+...,\ i=\overline{0,n_1+p}\ ,$$

және (2.6) формуладағы $y_{\varepsilon}(t), w_{\varepsilon}(\tau)$ үшін қатарды пайдаланып, сәйкес (2.5) теңдеуге қою арқылы келесі теңдеулерді аламыз:

$$\sum_{r=1}^{m}\varepsilon^r A_{n+r}(t)\left(y_0^{(n+r)}(t)+\varepsilon y_1^{(n+r)}(t)+...\right)+\sum_{k=0}^{n}A_k(t)\left(y_0^{(k)}(t)+\varepsilon y_1^{(k)}(t)+...\right)=$$

$$=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)\left(y_0^{(i)}(x)+\varepsilon y_1^{(i)}(x)+...\right)dx+\int_0^{\infty}\sum_{i=0}^{n_1+p}\varepsilon^{n_1+1-i}(H_i(t,0))$$

$$+\varepsilon sH_i'(t,0)+...)(\overset{(i)}{w_0}(s)+\varepsilon\overset{(i)}{w_1}(s)+...)ds \qquad (2.13)$$

$A_i(\varepsilon\tau)$ функциясын Тейлор қатарына жіктеп,

$$A_i(\varepsilon\tau)=A_i(0)+\varepsilon\tau A_i'(0)+...,\qquad \text{i=1,2,3,…}$$

және (2.4) қатарды енгізу арқылы шекаралық қабатты функция үшін теңдеу келесі түрге ие болады:

$$\left(\overset{(n+m)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n+m)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+A_{n+m-1}(\varepsilon\tau)\left(\overset{(n+m-1)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n+m-1)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+$$

$$+A_{n+m-2}(\varepsilon\tau)\left(\overset{(n+m-2)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n+m-2)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+\ldots+$$

$$+A_{n+1}(\varepsilon\tau)\left(\overset{(n+1)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n+1)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+A_n(\varepsilon\tau)\left(\overset{(n)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+ \tag{2.14}$$

$$+\varepsilon A_{n-1}(\varepsilon\tau)\left(\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)+\varepsilon\overset{(n-1)}{w_1}(\tau)+\ldots\right)+\ldots+\varepsilon^n A_0(\varepsilon\tau)\left(w_0(\tau)+\varepsilon w_1(\tau)+\ldots\right)=0.$$

$y_\varepsilon(t)$ үшін арналған теңдеудің оң жағындағы

$$I=\int_0^\infty\sum_{i=0}^{n_1+p}\varepsilon^{n_1+1-i}\left(H_i(t,0)+\varepsilon sH'_i(t,0)+\frac{(\varepsilon s)^2}{2}H''_i(t,0)+\ldots\right)\left(\overset{(i)}{w_0}(s)+\varepsilon\overset{(i)}{w_1}(s)+\ldots\right)ds \tag{2.15}$$

Бұл интегралдағы ε кіші параметрдің теріс дәрежелерінің коэффициенттерін қарастырсақ. Алайда, бұл жағдай тек p>1(p=2,…,m) жағдайында пайда болады

$$\frac{1}{\varepsilon}:\int_0^\infty\Bigg[H_{n_1+2}(t,0)\overset{(n_1+2)}{w_0}(s)+H_{n_1+3}(t,0)\overset{(n_1+3)}{w_1}(s)+sH'_{n_1+3}(t,0)\overset{(n_1+3)}{w_0}(s)+\ldots+$$
$$+H_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p)}{w_{p-2}}(s)+sH'_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p)}{w_{p-3}}(s)+\ldots+\frac{s^{p-2}}{(p-2)!}H^{(p-2)}_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p)}{w_0}(s)\Bigg]ds$$

және интеграл мәнін есептесек, нәтижесінде келесі өрнекті аламыз

$$\frac{1}{\varepsilon}:-H_{n_1+2}(t,0)\overset{(n_1+1)}{w_0}(0)-H_{n_1+3}(t,0)\overset{(n_1+2)}{w_1}(0)+H'_{n_1+3}(t,0)\overset{(n_1+1)}{w_0}(0)-$$

$$-H_{n_1+4}(t,0)\overset{(n_1+3)}{w_2}(0)+H'_{n_1+4}(t,0)\overset{(n_1+2)}{w_1}(0)-H''_{n_1+4}(t,0)\overset{(n_1+1)}{w_0}(0)-\ldots-$$

$$-H_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p-1)}{w_{p-2}}(0)+H'_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p-2)}{w_{p-3}}(0)+\ldots+(-1)^{p-1}H^{(p-2)}_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+1)}{w_0}(0)=$$

$$=\left(-H_{n_1+2}(t,0)+H'_{n_1+3}(t,0)-H''_{n_1+4}(t,0)+\ldots+(-1)^{p-1}H^{(p-2)}_{n_1+p}(t,0)\right)\overset{(n_1+1)}{w_0}(0)+$$

$$+\left(-H_{n_1+3}(t,0)+H'_{n_1+4}(t,0)+\ldots+(-1)^{p-2}H^{(p-3)}_{n_1+p}(t,0)\right)\overset{(n_1+2)}{w_1}(0)+\ldots+$$

$$+H_{n_1+p}(t,0)\overset{(n_1+p-1)}{w_{p-2}}(0).$$

Енді (2.10) шарттарды ескерсек, онда $\frac{1}{\varepsilon}$ алдындағы коэффициенттері нөлге айналады.

(2.13) теңдеуінің екі жағындағы бірдей дәрежелі ε алдындағы коэффициенттерді салыстырсақ $y_0(t)$ үшін келесі түрдегі теңдеуді аламыз:

$$L_0y_0\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k(t)y_0^{(k)}(t)=F(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)y_0^{(i)}(x)dx+\Delta_0(t),\qquad(2.16_0)$$

мұндағы $\Delta_0(t)$ интегралдық мүшенің бастапқы секірісі деп аталады және келесі формуламен анықталады:

$$\Delta_0(t)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-i}(-1)^jH^{(j)}_{n_1+i+j}(t,0)\Delta^0_{i-1},\qquad(2.17_0)$$

ал $\Delta^0_{i-1}, i=\overline{1,p}$ шешімнің бастапқы секірісі деп аталады және

$$\Delta^0_{i-1}=-\overset{(n_1+i-1)}{w_{i-1}}(0),\ i=\overline{1,p}.\qquad(2.18_0)$$

түрінде өрнектеледі.

Коэффициенттерді анықтайтын бастапқы шарттар (2.8), (2.9) формуласынан анықталады

$$y_0^{(i)}(0)=\alpha_i,\quad i=\overline{0,n_1-1},$$

$$y_0^{(n_1+i-1)}(0)=\alpha_{n_1+i-1}+\Delta_{i-1}^0,\quad i=\overline{1,p}, \qquad (2.19_0)$$

$$y_0^{(i)}(1)=\beta_i,\quad i=\overline{0,q-1}$$

(2.16_0), (2.19_0) есебінен $y_0(t)$ коэффициенті және (2.18_0) формуласымен өрнектелетін $\Delta_{i-1}^0, i=\overline{1,p}$ мәні анықталады, яғни $y_0(t),\Delta_0^0,,...,\Delta_{p-1}^0$ белгісіздері табылады.

(2.14) теңдеуден ε дәрежелері бойынша теңестіру арқылы, $w_0(\tau)$ үшін n+m-ретті сызықты дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$w_0^{(n+m)}(\tau)+A_{n+m-1}(0)\,w_0^{(n+m-1)}(\tau)+...+A_n(0)\,w_0^{(n)}(\tau)=0. \qquad (2.20_0)$$

Енді, бұл сызықты біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үшін (2.20_0) теңдеуіне сәйкес сипаттауыш теңдеуді өрнектесек,

$$\mu^n(0)(\mu^m(0)+A_{n+m-1}(0)\,\mu^{m-1}(0)+\ldots+A_{n+1}(0)\mu(0)+A_n(0))=0. \qquad (2.21)$$

Бұл дәл II шарттағы қосымша сипаттауыш теңдеуге сәйкес болып тұр, ондай болса сәйкес түбірлері

$$\mu_1(0)\neq\mu_2(0)\neq...\neq\mu_m(0)<0$$

тең, онда, біз (2.20_0) теңдеуінің жалпы шешімін келесі формада аламыз:

$$w_0(\tau)=C_1^0e^{\mu_1(0)\tau}+...+C_m^0e^{\mu_m(0)\tau}+C_{m+1}^0+C_{m+2}^0\tau+...+C_{m+n}^0\tau^{n-1}.$$

$w_0(\tau)$ шекаралық қабатты функция болу керек болған соң, яғни $w_0^{(i)}(\infty)=0,\ i=\overline{0,n-1}$ шарты орындалатындай, онда біз $C_i^0=0,\ i=\overline{m+1,m+n}$ аламыз. Онда келесі өрнек орынды:

$$w_0(\tau)=C_1^0e^{\mu_1(0)\tau}+...+C_m^0e^{\mu_m(0)\tau},\quad \tau\geq 0. \qquad (2.22)$$

Белгісіз $C_i^0, i=\overline{1,m}$ тұрақтыларын анықтау үшін, (2.22)-теңдігін n_1-нен n_1+m-1 ретке дейін интегралдаймыз және ол үшін белгілі $w_0^{(n_1)}(0)=-\Delta_1^0$

((2.18$_0$), $i=1$ қара) және $\overset{(i)}{w}_0(0)=0$, $i=\overline{n_1+1,n_1+m-1}$ ((2.10), $k=0$ қара) қолданамыз. Онда (2.22)-теңдігінен, біз алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} C_1^0\mu_1^{n_1}(0)+\ldots+C_m^0\mu_m^{n_1}(0)=-\Delta_0^0, \\ C_1^0\mu_1^{n_1+1}(0)+\ldots+C_m^0\mu_m^{n_1+1}(0)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^0\mu_1^{n_1+m-1}(0)+\ldots+C_m^0\mu_m^{n_1+m-1}(0)=0 \end{cases} \tag{2.23}$$

(2.23) жүйенің бас анықтауышы $\omega(0)=\mu_1^{n_1}(0)\cdots\mu_m^{n_1}(0)\cdot V(\mu_1(0),\ldots,\mu_m(0))\neq 0$, мұндағы $V(\mu_1(0),\ldots,\mu_m(0))$ Вандермонд анықтауышы. Сәйкесінше, (2.23) жүйенің $C_i^0=\overline{C}_i^0, i=\overline{1,m}$ жалғыз шешімі бар, оны (2.22)-теңдікке қою арқылы

$$w_0(\tau)=\sum_{i=1}^{m}\overline{C}_i^0 e^{\mu_i(0)\tau},\ \tau\geq 0 \tag{2.24$_0$}$$

теңдігін аламыз.

ε параметрінің жеткілікті аз шамасы үшін $w_k(\tau)$ функциясы үшін $\tau\geq 0$ болғанда

$$\left|\overset{(i)}{w}_0(\tau)\right|\leq K\,\mathrm{e}^{-\gamma\tau}, i=\overline{0,n+m-1}, \tau\geq 0 \tag{2.25$_0$}$$

бағалауы орынды, мұндағы K,γ оң таңбалы тұрақтылар.

(2.13)-теңдеуден, ε кіші параметрі бойынша коэффициенттерді салыстыра отырып, $y_1(t)$ коэффициентін анықтауға арналған $n-$ ретті сызықты интегро–дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\varepsilon^1:\ A_n(t)y_1^{(n)}(t)+\ldots+A_0(t)y_1(t)=-A_{n+1}(t)y_0^{(n+1)}(t)+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)y_1^{(i)}(x,\varepsilon)dx+$$

$$+\int_0^{\infty}\left(H_{n_1}(t,0)\overset{(n_1)}{w}_0(s)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=0}^{p}\frac{s^j}{j!}H_{n_1+p}^{(j)}(t,0)\overset{(n_1+p)}{w}_{p-j}(s)\right)ds$$

Бұл теңдікті ықшамдап жазсақ, $y_1(t)$ үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$L_0 y_1 \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(t) y_1^{(k)}(t) = F_1(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+p} H_i(t,x) y_1^{(i)}(x) dx + \Delta_1(t), \quad (2.16_1)$$

мұндағы

$$F_1(t) = -A_{n+1}(t) y_0^{(n+1)}(t) - \sum_{j=0}^{p} (-1)^{j+1} H_{n_1+j}^{(j)}(t,0) \overset{(n_1-1)}{w_0}(0) \quad (2.26_1)$$

$\Delta_1(t)$ - интегралдық мүшенің бастапқы секірісі деп аталады және

$$\Delta_1(t) = \sum_{i=2}^{p+1} \sum_{j=0}^{p+1-i} (-1)^j H_{n_1+i-1+j}^{(j)}(t,0) \Delta_{i-1}^1 \quad (2.17_1)$$

формуласымен анықталады, ал $\Delta_{i-1}^1, i = \overline{2, p+1}$ шешімнің бастапқы секірісі деп аталып,

$$\Delta_{i-1}^1 = -\overset{(n_1+i-2)}{w_{i-1}}(0), \; i = \overline{2, p+1} \quad (2.18_1)$$

өрнекпен өрнектеледі.

$y_1(t)$ коэффициентін анықтау үшін бастапқы шарт (2.8), (2.9)-ден тікелей шығады:

$$\begin{aligned} &y_1^{(i)}(0) = 0, \;\; i = \overline{0, n_1 - 2}, \\ &y_1^{(n_1-1)}(0) = -\overset{(n_1-1)}{w_0}(0), \\ &y_1^{(n_1+i-2)}(0) = \Delta_{i-1}^1, i = \overline{2, p+1}, \\ &y_1^{(i)}(1) = 0, \;\; i = \overline{0, q-1} \end{aligned} \quad (2.19_1)$$

(2.16_1), (2.19_1)-есебінен $y_1(t)$ коэффициентін анықтаймыз және $\Delta_{i-1}^1, i = \overline{2, p+1}$ мәнін (2.18_1) формуласымен табамыз, яғни $y_1(t), \Delta_0^1, , ..., \Delta_p^1$ табылады.

Ары қарай, ε кіші параметрі бойынша (2.14)-теңдеудегі коэффициенттерді салыстыра отырып, $w_1(\tau)$ коэффициентін анықтауға арналған $n+m$ - ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\overset{(n+m)}{w_1}(\tau) + A_{n+m-1}(0) \overset{(n+m-1)}{w_1}(\tau) + ... + A_n(0) \overset{(n)}{w_1}(\tau) = \Phi_1(\tau), \quad (2.20_1)$$

мұндағы $\Phi_1(\tau)$ - $w_0(\tau)$-дан тәуелді белгілі функция.

$$\Phi_1(\tau) = -A_{n-1}(0)\overset{(n-1)}{w_0}(\tau) - \tau\sum_{i=0}^{m-1} A'_{n+i}(0)\overset{(n+i)}{w_0}(\tau) \qquad (2.26_1)$$

(2.20_1) теңдеуінің шешімін, II шартқа және $w_1(\infty) = 0$ шекаралық қабат шартына сәйкес, келесі түрде өрнектесек болады

$$w_1(\tau) = C_1^1 e^{\mu_1(0)\tau} + ... + C_m^1 e^{\mu_m(0)\tau} + B_1(\tau), \qquad (2.27)$$

мұндағы $B_1(\tau)$ – (2.20_1) теңдеуінің дербес шешімі болып табылады, және ол (2.24_0) пен (2.26_1) сәйкес келесі формада өрнектеледі:

$$B_1(\tau) = \tau(b_1^1(\tau)e^{\mu_1(0)\tau} + ... + b_m^1(\tau)e^{\mu_m(0)\tau}), \qquad (2.28_1)$$

мұндағы $b_i^1(\tau), i = \overline{1,m}$ $-\tau$-айнымалысынан тәуелді бірінші дәрежелі көпмүшелік болып табылады. (2.27)–теңдігінен белгісіз $C_i^1, i = \overline{1,m}$ тұрақтыларын табу үшін, белгілі $\overset{(n_1)}{w_1}(0) = -\Delta_1^1$, $\overset{(n_1+1)}{w_1}(0) = -\Delta_1^0$ және $\overset{(i)}{w_1}(0) = 0$, $i = \overline{n_1+2, n_1+m-1}$ сәйкес, біз келесі түрдегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} C_1^1\mu_1^{n_1}(0) + ... + C_m^1\mu_m^{n_1}(0) = -\Delta_1^1 - B_1^{(n_1)}(0), \\ C_1^1\mu_1^{n_1+1}(0) + ... + C_m^1\mu_m^{n_1+1}(0) = -\Delta_1^0 - B_1^{(n_1+1)}(0), \\ C_1^1\mu_1^{n_1+2}(0) + ... + C_m^1\mu_m^{n_1+2}(0) = -B_1^{(n_1+2)}(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^1\mu_1^{n_1+m-1}(0) + ... + C_m^1\mu_m^{n_1+m-1}(0) = -B_1^{(n_1+m-1)}(0) \end{cases} \qquad (2.28)$$

(2.28) жүйенің бас анықтауышы, (2.23) жүйедегі сияқты, $\omega(0) = \mu_1^{n_1}(0)\cdots\mu_m^{n_1}(0)\cdot V(\mu_1(0),..., \mu_m(0)) \neq 0$ тең, мұндағы $V(\mu_1(0),..., \mu_m(0))$– Вандермонд анықтауышы. Сәйкесінше, (2.28) жүйе де $C_i^1 = \overline{C}_i^1, i = \overline{1,m}$ жалғыз шешімге ие, және оны (2.27)–теңдікке қою арқылы келесі өрнекті аламыз:

$$w_1(\tau) = \sum_{i=1}^{m}\overline{C}_i^1 e^{\mu_i(0)\tau} + B_1(\tau) = \sum_{i=1}^{m}(\overline{C}_i^1 + \tau b_i^1(\tau))e^{\mu_i(0)\tau},\ \tau \geq 0 \qquad (2.24_1)$$

(2.24_1)–функциядан

$$\left|\overset{(i)}{w}_1(\tau)\right| \le K\,\mathrm{e}^{-\gamma\tau}, i=\overline{0,n+m-1}, \tau \ge 0 \qquad (2.25_1)$$

болатындай, $K>0$ және $\gamma>0$ деген тұрақтылары бар болатындығы айқын. Осылайша бірінші жуықтау толығымен табылды.

Енді ε^2 кіші параметрі бойынша коэффициенттерді салыстырып, $y_2(t)$ коэффициентін анықтауға үшін келесі түрдегі $n-$ретті сызықты интегро–дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$L_0 y_2 \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(t) y_2^{(k)}(t) = F_2(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+p} H_i(t,x) y_2^{(i)}(x)dx + \Delta_2(t), \qquad (2.16_2)$$

мұндағы

$$F_2(t) = -A_{n+1}(t) y_1^{(n+1)}(t) - A_{n+2}(t) y_0^{(n+2)}(t) + \sum_{j=0}^{p} (-1)^{j+1} H_{n_1+j}^{(j)}(t,0) \overset{(n_1-1)}{w}_1(0) + \qquad (2.26_2)$$

$$+ \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^{j+1} H_{n_1-1+j}^{(j)}(t,0) \overset{(n_1-2)}{w}_1(0)$$

Интегралдық мүшенің бастапқы секірісі деп аталатын $\Delta_2(t)$ функциясы

$$\Delta_2(t) = \sum_{i=i}^{p+2} \sum_{j=0}^{p+2-i} (-1)^j H_{n_1+i-2+j}^{(j)}(t,0) \Delta_{i-1}^2 \qquad (2.17_2)$$

түрінде анықталады , мұндағы шешімнің бастапқы секірісі болып табылатын Δ_{i-1}^2 шамасы

$$\Delta_{i-1}^2 = -\overset{(n_1+i-3)}{w}_{i-1}(0),\ i=\overline{i,p+2} \qquad (2.18_2)$$

түрінде анықталады.

$y_2(t)$ коэффициентін анықтау үшін (2.8), (2.9)-шарттарынан тікелей шыққан бастапқы шарт:

$$
\begin{aligned}
&y_2^{(i)}(0)=0,\ \ i=\overline{0,n_1-3},\\
&y_2^{(n_1-2)}(0)=-\overset{(n_1-2)}{w_0}(0),\ y_2^{(n_1-1)}(0)=-\overset{(n_1-1)}{w_1}(0),\\
&y_1^{(n_1+i-3)}(0)=\Delta_{i-1}^2,\ i=\overline{3,p+2},\\
&y_2^{(i)}(1)=0,\ \ i=\overline{0,q-1}
\end{aligned}
\qquad (2.19_2)
$$

(2.16_2), (2.19_2)-есебінен $y_2(t)$ коэффициентін анықтаймыз және (2.18_2) арқылы $\Delta_{i-1}^2, i=\overline{3,p+2}$ мәндерін анықтаймыз, яғни $y_2(t),\Delta_2^2,,...,\Delta_{p+1}^2$ табылады.

Ары қарай, (2.5)-теңдеуден ε кіші параметрі бойынша коэффициенттерді салыстыра отырып, $w_2(\tau)$ коэффициентін анықтауға арналған $n+m$- ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$
\overset{(n+m)}{w_2}(\tau)+A_{n+m-1}(0)\overset{(n+m-1)}{w_2}(\tau)+...+A_n(0)\overset{(n)}{w_2}(\tau)=\Phi_2(\tau), \qquad (2.20_2)
$$

мұндағы $\Phi_2(\tau)$ -$w_0(\tau),w_1(\tau)$ -функцияларынан тәуелді белгілі функция:

$$
\Phi_2(\tau)=a_1^2(\tau)e^{\mu_1(0)\tau}+...+a_m^2(\tau)e^{\mu_m(0)\tau} \qquad (2.26_2)
$$

мұндағы $a_i^2(\tau),\ i=\overline{1,m}-\tau$ бойынша екінші дәрежелі белгілі көпмүшелік.

(2.20_2) теңдеуінің шешімін, II шартқа және $w_2(\infty)=0$ шекаралық қабат шартына сәйкес,

$$
\begin{aligned}
w_2(\tau)=C_1^2e^{\mu_1(0)\tau}+...+C_m^2e^{\mu_m(0)\tau}+C_{m+1}^2+C_{m+2}^2\tau+\\
+...+C_{m+n}^2\tau^{n-1}+B_2(\tau),
\end{aligned}
\qquad (2.29)
$$

түрінде өрнектесек болады, мұндағы $B_2(\tau)$ – (2.20_2) теңдеуінің дербес шешімі болып табылады және ол (2.24_0), (2.24_1) мен (2.26_2)–формулаларға сәйкес

$$
B_2(\tau)=\tau(b_1^2(\tau)e^{\mu_1(0)\tau}+...+b_m^2(\tau)e^{\mu_m(0)\tau}), \qquad (2.28_2)
$$

формада өрнектеледі және $b_i^2(\tau),i=\overline{1,m}\ -\tau$-айнымалысынан тәуелді екінші дәрежелі көпмүше болып табылады. Онда $\overset{(i)}{w_2}(\infty)=0$ себепті

$$w_2(\tau) = C_1^2 e^{\mu_1(0)\tau} + \ldots + C_m^2 e^{\mu_m(0)\tau} + B_2(\tau)\,. \qquad (2.30)$$

(2.30)–функциядан белгісіз $C_i^1, i = \overline{1,m}$ тұрақтыларын табу үшін, келесі түрдегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} C_1^2 \mu_1^{n_1}(0) + \ldots + C_m^2 \mu_m^{n_1}(0) = -\Delta_2^2 - B_2^{(n_1)}(0), \\ C_1^2 \mu_1^{n_1+1}(0) + \ldots + C_m^2 \mu_m^{n_1+1}(0) = -\Delta_2^1 - B_2^{(n_1+1)}(0), \\ C_1^2 \mu_1^{n_1+2}(0) + \ldots + C_m^2 \mu_m^{n_1+2}(0) = -\Delta_2^0 - B_2^{(n_1+2)}(0), \\ C_1^2 \mu_1^{n_1+3}(0) + \ldots + C_m^2 \mu_m^{n_1+3}(0) = -B_2^{(n_1+3)}(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^2 \mu_1^{n_1+m-1}(0) + \ldots + C_m^2 \mu_m^{n_1+m-1}(0) = -B_2^{(n_1+m-1)}(0) \end{cases} \qquad (2.31)$$

мұндағы $\Delta_2^2, \Delta_2^1, \Delta_2^0 -$ белгілі шамалар.

Дәл (2.23), (2.28) сияқты, сәйкесінше, (2.31) жүйе де $\overline{C}_i = \overline{C}_i^2, i = \overline{1,m}$ жалғыз шешімге ие, және оны (2.30)–теңдікке қою арқылы келесі өрнекті аламыз:

$$w_2(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_i^2 e^{\mu_i(0)\tau} + B_2(\tau) = \sum_{i=1}^{m} (\overline{C}_i^2 + \tau b_i^2(\tau)) e^{\mu_i(0)\tau},\ \tau \geq 0 \qquad (2.24_2)$$

(2.24_2)–теңдіктен

$$\left| w_2^{(i)}(\tau) \right| \leq K\, \mathrm{e}^{-\gamma\tau}, i = \overline{0, n+m-1}, \tau \geq 0 \qquad (2.25_2)$$

болатындай, $K > 0$ және $\gamma > 0$ деген тұрақтылары бар болатындығы айқын.

Осылайша екінші жуықтау толығымен табылды.

$y_k(t), w_k(\tau), k \geq 3$ коэффициенттері де осылайша анықталады. $y_k(t)$ үшін, біз *n*-ретті сызықты интегралды–дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$L_0 y_k \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i(t) y_k^{(i)}(t) = F_k(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n_1+p} H_i(t,x) y_k^{(i)}(x) dx + \Delta_k(t), \qquad (2.16_k)$$

мұндағы $F_k(t) - y_i(t), w_i(\tau), i = \overline{0, k-1}$ тәуелді белгілі функция:

$$F_k(t) = -\sum_{i=1}^{k} A_{n+i}(t) y_{k-i}^{(n+i)}(t) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p+k-i} (-1)^j H_{n_1+i-k+j}^{(j)}(t,0) \overset{(n_1+i-k-1)}{w_{i-1}}(0),$$

$$k = \overline{1, p}, \qquad (2.26_k)$$

$$F_k(t) = -\sum_{i=1}^{p} A_{n+i}(t) y_{k-i}^{(n+i)}(t) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m+k-i} (-1)^j H_{n_1+i-k+j}^{(j)}(t,0) \overset{(n_1+i-k-1)}{w_{i-1}}(0),$$

$$k = p+1,\ p+2,...,$$

$\Delta_k(t)$ – *интегралдық мүшенің бастапқы секірісі* деп аталады және

$$\Delta_k(t) = \sum_{i=k+1}^{p+k} \sum_{j=0}^{p+k-i} (-1)^j H_{n_1+i-k+j}^{(j)}(t,0) \Delta_{i-1}^k, \qquad (2.17_k)$$

формуласымен анықталады және $\Delta_{i-1}^k, i = \overline{k+1, k+p}$ – шешімінің бастапқы секірісі деп аталады және

$$\Delta_{i-1}^k = - \overset{(n_1+i-k-1)}{w_{i-1}}(0),\ i = \overline{k+1, k+p} \qquad (2.18_k)$$

түрде өрнектеледі.

Коэффициенттерді анықтау үшін бастапқы шарттар (2.8), (2.9)– шарттарынан алынады :

$$\begin{aligned}
&y_k^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, n_1 - 1 - k}, \\
&y_k^{(n_1-k)}(0) = - \overset{(n_1-k)}{w_0}(0), \\
&y_k^{(n_1-k+1)}(0) = - \overset{(n_1+1-k)}{w_1}(0), \qquad (2.19_k) \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&y_k^{(n_1-1)}(0) = - \overset{(n_1-1)}{w_{k-1}}(0),
\end{aligned}$$

$$y_k^{(n_1+i-k-1)}(0) = -\Delta_{i-1}^k, \quad i = \overline{k+1, k+p},$$

$$y_0^{(i)}(1) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}.$$

(2.16_k), (2.19_k) есептерінен, біз $y_k(t)$ коэффициенттерін табамыз, ал $\Delta_{i-1}^k, i = \overline{k+1, k+p}$ мәні (2.18_k) формуласынан анықталады, яғни

$y_k(t), \Delta_k^k, , ..., \Delta_{k+p+1}^k$ табылады.

Енді, (2.5)–теңдеудегі ε^k–ның коэффициенттерін салыстыру арқылы, біз $w_k(\tau)$ коэффициентін анықтау үшін $n+m$–ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$\overset{(n+m)}{w_k}(\tau) + A_{n+m-1}(0)\overset{(n+m-1)}{w_k}(\tau) + ... + A_n(0)\overset{(n)}{w_k}(\tau) = \Phi_k(\tau), \qquad (2.20_k)$$

мұндағы $\Phi_k(\tau)$ – $w_i(\tau), i < k$–функцияларынан тәуелді белгілі функция және келесі түрде жазуға болады:

$$\Phi_2(\tau) = a_1^k(\tau)e^{\mu_1(0)\tau} + ... + a_m^m(\tau)e^{\mu_m(0)\tau} \qquad (2.26_k)$$

мұндағы $a_i^k(\tau),\ i = \overline{1,m} - \tau$ бойынша екінші дәрежелі белгілі көпмүшелік.

(2.41_k) теңдеудің шешімін, II–шартты және $w_k(\infty) = 0$ шекаралық қабаттың шартын ескере отырып,

$$w_k(\tau) = C_1^k e^{\mu_1(0)\tau} + ... + C_m^k e^{\mu_m(0)\tau} + B_k(\tau), \qquad (2.32)$$

түрінде өрнектесек болады, мұндағы $B_k(\tau)$–(2.41_k) теңдеуінің дербес шешімі, (2.24_0), (2.24_1), …, (2.24_{k-1}) және (2.26_k) сәйкес

$$B_k(\tau) = \tau(b_1^k(\tau)e^{\mu_1(0)\tau} + ... + b_m^k(\tau)e^{\mu_m(0)\tau}), \qquad (2.28_k)$$

формада анықталады және $b_i^k(\tau), i = \overline{1,m} - \tau$ айнымалысынан тәуелді екінші дәрежелі көпмүше. (2.32)–функциясынан белгісіз $C_i^k, i = \overline{1,m}$ тұрақтыларын, $\overset{(n_1+i)}{w_k}(0) = -\Delta_k^{k-i},\ i = \overline{0,k}$ және $\overset{(i)}{w_k}(0) = 0,\ i = \overline{n_1+k+1, n_1+m-1}$ сәйкес келесі алгебралық теңдеулер жүйесінен анықтаймыз:

$$\begin{cases} C_1^k \mu_1^{n_1}(0) + ... + C_m^k \mu_m^{n_1}(0) = -\Delta_k^k - B_k^{(n_1)}(0), \\ C_1^k \mu_1^{n_1+1}(0) + ... + C_m^k \mu_m^{n_1+1}(0) = -\Delta_k^{k-1} - B_k^{(n_1+1)}(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^k \mu_1^{n_1+k}(0) + ... + C_m^k \mu_m^{n_1+k}(0) = -\Delta_k^0 - B_k^{(n_1+k)}(0), \\ C_1^k \mu_1^{n_1+k+1}(0) + ... + C_m^k \mu_m^{n_1+k+1}(0) = -B_k^{(n_1+k+1)}(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^k \mu_1^{n_1+m-1}(0) + ... + C_m^k \mu_m^{n_1+m-1}(0) = -B_k^{(n_1+m-1)}(0) \end{cases} \quad (2.33)$$

(2.33) жүйенің бас анықтауышы, (2.23), (2.28), (2.31) жүйелері сияқты $\omega(0) = \mu_1^{n_1}(0) \cdots \mu_m^{n_1}(0) \cdot V(\mu_1(0),..., \mu_m(0)) \neq 0$ тең, мұндағы $V(\mu_1(0),..., \mu_m(0))$– Вандермонд анықтауышы. Сәйкесінше, (2.33)-жүйе де жалғыз $C_i^k = \overline{C}_i^k, i = \overline{1,m}$ шешімге ие, және оны (2.32)–теңдікке қою арқылы келесі өрнекті аламыз

$$w_k(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_i^k e^{\mu_i(0)\tau} + B_k(\tau) = \sum_{i=1}^{m} (\overline{C}_i^k + \tau b_i^k(\tau)) e^{\mu_i(0)\tau}, \ \tau \geq 0 \qquad (2.24_k)$$

(2.24_k)–теңдігінен

$$\left| w_k^{(i)}(\tau) \right| \leq K \, e^{-\gamma\tau}, i = \overline{0, n+m-1}, \tau \geq 0 \qquad (2.25_k)$$

болатындай, $K > 0$ және $\gamma > 0$ деген тұрақтылары бар болатындығы айқын.

Осылайша, k-шы толығымен анықталды.

2.2 Шеттік есеп шешімінің асимптотикасын негіздеу

(2.3), (2.4) жіктелудің N дербес қосындысын құрайық:

$$\bar{y}_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon^{n_1}\sum_{k=0}^{N+n_2+m-1}\varepsilon^k w_k(\tau),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \tag{2.34}$$

мұндағы $N\geq 0$ бүтін сан. $y_k(t), k=\overline{0,N}$ коэффициенттері (2.16_k), (2.19_k)– есебінен бірмәнді анықталады және, өзінің $(n+m-1)-$ретті туындыларымен бірге, [0,1] кесіндісінде шенелген. $N\geq n_1$ үшін, $\overset{(i)}{w}_k(\tau),\ k=\overline{0,N-n_1},\ i=\overline{0,n+m-1}$ коэффициенттері (2.24_k) формуламен анықталады, яғни, бұл коэффициенттер $\tau\geq 0$ үшін шекаралық қабатты типті функциялар болып табылады. Ал, $\overset{(i)}{w}_k(\tau),\ k=\overline{N-n_1+1,N+n_2+m-1}$ коэффициенттері келесі түрде анықтаймыз: $i=\overline{0,k-(N-n_1+1)}$ мәні үшін $\overset{(i)}{w}_k(0)=0$ деп анықтаймыз, яғни $\overset{(i)}{w}_k(\tau)$ функцияларын $i=\overline{0,k-(N-n_1+1)}$ мәндерінде шенелген, ал $i=\overline{k-(N-n_1),n+m-1}$ мәндері үшін, біз оларды шекаралық қабатты функциялар ретінде қалдырамыз, яғни біз оларды (2.24_k) формулаға сәйкес анықтаймыз. Ал, $N<n_1$ жағдайында, $\overset{(i)}{w}_k(\tau),\ k=\overline{0,N+n_2+m-1},\ i=\overline{0,n+m-1}$ коэффициенттері келесі түрде анықталады: $\overset{(i)}{w}_k(0)=0,\quad i=\overline{0,k-(N-n_1+1)},$ ал $i=\overline{k-(N-n_1),n+m-1}$ мәндері үшін, $\overset{(i)}{w}_k(\tau)$–ны $\tau\geq 0$ үшін шекаралық қабатты функция ретінде қалдырамыз, яғни, (2.24_k) формуласын пайдалану арқылы анықтаймыз.

(2.16) формуласы арқылы анықталатын, $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$ функциясы, (2.1), (2.2) есепті $O(\varepsilon^{N+1})$ дәлдікпен қанағаттандыратынын көреміз, яғни

$$L_\varepsilon\bar{y}_N\equiv\sum_{r=1}^{m}\varepsilon^r A_{n+r}(t)\bar{y}_N^{(n+r)}+\sum_{k=0}^{n}A_k(t)\bar{y}_N^{(k)}=F(t)+$$

$$+\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)\bar{y}_N^{(i)}(x,\varepsilon)dx+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{2.35}$$

$$\bar{y}_N^{(i)}(0,\varepsilon)=\alpha_i,\ i=\overline{0,l-1},\qquad \bar{y}_N^{(i)}(1,\varepsilon)=\beta_i,\ i=\overline{0,q-1} \tag{2.36}$$

Теорема-7. $A_i(t),F(t),i=\overline{0,n+m-1}$ функциялары [0,1] кесіндісінде

$H_i(t,x),\ i=\overline{0,n_1+m}\ , D=(0\le t,x\le 1)$ облысында $(N+n_2+m)-$ші ретті туындыларымен бірге үзіліссіз болсын және II-V шарттары орындалсын. Сонда, ε параметрінің жеткілікті аз мәндері үшін (2.1), (2.2) есептің $0\le t\le 1$ аралықта шешімі бар, жалғыз және

$$y(t,\varepsilon)=\bar{y}_N(t,\varepsilon)+R_N(t,\varepsilon), \tag{2.37}$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$ (2.37) формуламен сипатталады, ал $R_N(t,\varepsilon)$ қалдық мүшесі үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon^{N+1},\quad i=\overline{0,n+m-1},\quad 0\le t\le 1, \tag{2.38}$$

мұндағы $K>0$ - ε нан тәуелсіз тұрақты

Дәлелдеуі. (2.1), (2.2) есептің шешімінің бар және жалғызды теорема-4-те көрсетіліп, дәлелденген. (2.38) бағалауды дәлелдейік.

(2.37)-дегі $y(t,\varepsilon)$–шешімді (2.1), (2.2) есебіне қою арқылы және (2.35),(2.36)–есебін ескере отырып, біз $R_N(t,\varepsilon)$ қалдық мүшесі үшін келесі түрдегі сингулярлы ауытқыған есепті аламыз:

$$L_\varepsilon R_N\equiv\sum_{r=1}^{m}\varepsilon^r A_{n+r}(t)R_N{}^{(n+r)}+\sum_{k=0}^{n}A_k(t)R_N{}^{(k)}= \tag{2.39}$$

$$=\int_0^1\sum_{i=0}^{n_1+p}H_i(t,x)R_N{}^{(i)}(x,\varepsilon)dx+O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$R_N^{(i)}(0,\varepsilon)=0,\ i=\overline{0,l\text{-}1},\quad R_N^{(i)}(1,\varepsilon)=0,\ i=\overline{0,q\text{-}1} \tag{2.40}$$

(2.39), (2.40) есебі (2.1), (2.2) есептерімен бірдей. Сондықтан, осыған дейін алынған Теорема–5-тегі (1.30) бағалауды (2.39), (2.40) есебіне пайдаланып, келесіні аламыз

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon^{N+1}+K\varepsilon^{N+n_1+1-i}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},\ i=\overline{0,n+m-1}, \tag{2.41}$$

мұндағы $K>0-$ ε-нан тәуелсіз тұрақты. (2.41)–бағалаудан $i=\overline{0,n_1}$ мәні үшін біз келесі қажетті бағалауды аламыз:

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon^{N+1},\ i=\overline{0,n_1}\ .$$

Бірақ, (2.41) бағалаудан алынған $i=\overline{n_1+1,n+m-1}$ мәні үшін біз қажетті бағалау ала алмаймыз. Мысалы, (2.41) бағалаудан $i=n_1+1$ мәні үшін келесіні аламыз:

$$\left|R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)\right| \le K\varepsilon^{N+1} + K\varepsilon^N e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}. \qquad (2.42)$$

Бұдан $R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^N)$ екені шығады.

(2.42)–тегі $R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)$ үшін (2.42) өрнектегі қажетті бағалауды алу үшін, біз N–нің орнына $N+1$–ді қоямыз. Онда келесі бағалауды аламыз

$$\left|R_{N+1}^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)\right| \le K\varepsilon^{N+2} + K\varepsilon^{N+1} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}. \qquad (2.43)$$

Онда келесі өрнектен

$$R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon) = \bar{y}_{N+1}^{(n_1+1)}(t,\varepsilon) - \bar{y}_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon) + R_{N+1}^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)$$

(2.34)–функциясына сәйкес,

$$R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{N+1} y_{N+1}^{(n_1+1)}(t) + \varepsilon^{N+n_2+m-1} w_{N+n_2+m}^{(n_1+1)}(\tau) + R_{N+1}^{(n_1+1)}(t,\varepsilon). \qquad (2.44)$$

теңдігін аламыз.

(2.44)–теңдігінен (2.43) және (2.25_k) бағалауларды ескере отырып, біз $R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)$ үшін қажетті (2.38) бағалауды аламыз, яғни $R_N^{(n_1+1)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ Дәл солай $R_N^{(i)}(t,\varepsilon), i=\overline{n_1+2,n+m-1}$ үшін де бағалауларды алатын боламыз. Осылайша, теорема дәлелденді.

2.3 Мысал

(1.41), (1.42) шеттік есеп үшін $O(\varepsilon)$ дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық шешім құрайық

$$y_0(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon\left(\omega_0(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau) + \varepsilon^2\omega_2(\tau)\right),\ \tau=\frac{t}{\varepsilon}. \qquad (2.48)$$

(1.41), (1.42) шеттік есептің асимптотикалық жіктелуін келесі түрде өрнектейміз

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon w_\varepsilon(\tau),\ \tau = \frac{t}{\varepsilon} \tag{2.49}$$

мұндағы

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= y_0(t) + \varepsilon\, y_1(t) + \dots, \\ w_\varepsilon(\tau) &= w_0(\tau) + \varepsilon\, w_1(\tau) + \dots \end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.49) өрнекті (1.41) интегралды-дифференциалдық теңдеуге қоялық, сонда $y_\varepsilon(t)$ асимптотиканың регулярлы бөлігі үшін келесі интегралды-дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''(t) + 3\varepsilon y_\varepsilon''(t) + 2y_\varepsilon''(t) = 1 + \delta\int_0^1 y_\varepsilon'''(x)dx + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\int_0^1 \overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx,$$

оң жақ екінші интегралға $x = \varepsilon s$ алмастыруын жасайық:

$$\frac{\delta}{\varepsilon^2}\int_0^1 \overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = -\frac{\delta}{\varepsilon}\overset{\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon(0)$$

онда $y_\varepsilon(t)$ үшін келесі түрдегі теңдеуді аламыз:

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''(t) + 3\varepsilon y_\varepsilon''(t) + 2y_\varepsilon''(t) = 1 + \delta\int_0^1 y_\varepsilon'''(x)dx - \frac{\delta}{\varepsilon}\overset{\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon(0). \tag{2.51}$$

Ал, асимптотиканың шекаралық қабатты бөлігі үшін келесі теңдеу алынады:

$$\overset{(IV)}{\omega}_\varepsilon(\tau) + 3\overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon(\tau) + 2\overset{\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon(\tau) = 0. \tag{2.52}$$

Енді (2.49) өрнекті (1.42) шекаралық шартқа апарып қойып,

$$\begin{aligned} &y_\varepsilon(0) + \varepsilon\omega_\varepsilon(0) = \alpha_0, \\ &y_\varepsilon'(0) + \overset{\bullet}{\omega}_\varepsilon(0) = \alpha_1, \\ &y_\varepsilon''(0) + \frac{1}{\varepsilon}\overset{\bullet\bullet}{\omega}_\varepsilon(0) = \alpha_2, \\ &y_\varepsilon(1) = \beta, \end{aligned} \tag{2.53}$$

шарттарын аламыз. Енді (2.50) ескеріп, (2.51) теңдеудегі және (2.53) шарттағы кіші параметрдің нөл дәрежесі бойынша коэффициенттерін

жинасақ, онда асимптотиканың регулярлы бөлігінің $y_0(t)$ мүшесі үшін келесі түрдегі интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті аламыз:

$$2\bar{y}_0'' = 1 + \delta\int_0^1 \bar{y}_0'''(x)dx + \delta\Delta_2^0, \tag{2.54}$$

$$y_0(0) = \alpha_0,\ \ \bar{y}_0'(0) = \alpha_1 + \Delta_1^0,\ \ \bar{y}_0''(0) = \alpha_2 + \Delta_2^0,\ \ y_0(1) = \beta \tag{2.55}$$

(2.54), (2.55) есеп (1.58), (1.59) өзгертілген ауытқымаған есепке пара-пар болғандықтан, берілген есептің шешімін келесі түрде жаза аламыз:

$$y_0(t) = \frac{1+\delta\Delta_2^0}{4}\cdot\frac{t^2}{2} + \left(\alpha_1 + \Delta_1^0\right)t + \alpha_0$$

мұндағы шешімнің бастапқы секірістері

$$\Delta_1^0 = \beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}, \tag{2.56}$$

$$\Delta_2^0 = \frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}. \tag{2.57}$$

Сөйтіп, (2.54), (2.55) шеттік есептен (2.56), (2.57) түріндегі $\Delta_1^0,\ \Delta_2^0$ мәндерін ескеріп, $y_0(t)$ шешімін аламыз

$$y_0(t) = \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}t^2 + \left(\beta - \alpha_0 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)t + \alpha_0. \tag{2.58}$$

Ал, асимптотиканың шекаралық қабатты бөлігінің $\omega_0(\tau)$ мүшесі үшін келесі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті аламыз:

$$\overset{(IV)}{\omega}_0(\tau) + 3\overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_0(\tau) + 2\overset{\bullet\bullet}{\omega}_0(\tau) = 0 \tag{2.59}$$

$$\omega_0(0) = \frac{3\Delta_1^0}{2},\quad \overset{\bullet}{\omega}_0(0) = -\Delta_1^0,\ \ \overset{\bullet\bullet}{\omega}_0(0) = 0,\ \ \overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_0(0) = 2\Delta_1^0. \tag{2.60}$$

мұндағы, Δ_1^0 (2.56) формуламен анықталады. Берілген (2.59),(2.60) біртекті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімі келесі түрде болады:

$$\omega_0(t) = -\frac{\Delta_1^0}{2} e^{-2\tau} + 2\Delta_1^0 e^{-\tau}.$$

яғни,

$$\omega_0(t) = -\frac{1}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)e^{-2\tau} + \left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)e^{-\tau}. \qquad (2.61)$$

Ары қарай, (2.50) ескеріп, (2.51) теңдеудегі және (2.53) шарттағы кіші параметрдің бірінші дәрежесі бойынша коэффициенттерін жинасақ, онда $y_1(t)$ үшін келесідей интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті аламыз:

$$2\bar{y}_1'' = -3y_0''' + \delta\int_0^1 \bar{y}_1'''(x)dx + \delta\Delta_2^1, \qquad (2.62)$$

$$y_1(0) = -\omega_0(0),\ \bar{y}_1'(0) = \Delta_1^1,\quad \bar{y}_1''(0) = \Delta_2^1,\ y_1(1) = 0 \qquad (2.63)$$

Бұл шеттік есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$y_1(t) = \frac{\delta\Delta_2^1}{4}\cdot t^2 + \Delta_1^1 t - \frac{3\Delta_1^0}{2}$$

мұндағы

$$\Delta_2^1 = 0, \qquad (2.64)$$

$$\Delta_1^1 = \frac{3\Delta_1^0}{2}. \qquad (2.65)$$

Ондай болса,(2.56) және (2.64), (2.65) формулаларға сәйкес шешім келесі түрге ие болады:

$$y_1(t) = \frac{3}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)(t-1). \qquad (2.66)$$

(2.62), (2.63) шеттік есептен $y_1(t)$ шешімі және Δ_1^1, Δ_2^1 мәндері анықталады. Ал, асимптотиканың шекаралық қабатты бөлігі $\omega_1(\tau)$ функциясы келесі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп

$$\overset{(IV)}{\omega}_1(\tau)+3\overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_1(\tau)+2\overset{\bullet\bullet}{\omega}_1(\tau)=0 \tag{2.67}$$

$$\omega_1(0)=\frac{1}{2}\left(\Delta_2^0+3\Delta_1^1\right),\quad \overset{\bullet}{\omega}_1(0)=-\Delta_1^1,\ \overset{\bullet\bullet}{\omega}_1(0)=-\Delta_2^0,\ \overset{\bullet\bullet\bullet}{\omega}_1(0)=3\Delta_2^0+2\Delta_1^1, \tag{2.68}$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы, Δ_1^0, Δ_1^1 – сәйкесінше (2.56), (2.65) формулалармен анықталады. Бұл (2.67), (2.68) шеттік есептің шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}\omega_1(\tau)=&-\frac{1}{4}\left(\frac{2(1-2\alpha_2)}{2-\delta}+3\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-2\tau}+\\&+\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}+3\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-\tau}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

Ары қарай, (2.50) ескеріп, (2.51) теңдеудегі және (2.53) шарттағы кіші параметрдің екінші дәрежесі бойынша коэффициенттерін жинасақ, онда $y_2(t)$ үшін келесідей интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті аламыз:

$$2\bar{y}_2''(t)=-y_0^{(IV)}(t)-3y_1'''(t)+\delta\int_0^1\bar{y}_2'''(x)dx+\delta\Delta_2^2, \tag{2.70}$$

$$y_2(0)=-\omega_1(0),\ \bar{y}_2'(0)=\Delta_1^2,\quad \bar{y}_2''(0)=\Delta_2^2,\ y_2(1)=0 \tag{2.71}$$

(2.70), (2.71) шеттік есептен $y_2(t)$ шешімі

$$y_2(t)=\frac{\delta\Delta_2^2}{4}\cdot t^2+\Delta_1^2 t-\frac{1}{2}\left(\Delta_2^0+\frac{9}{2}\Delta_1^0\right) \tag{2.72}$$

және Δ_1^2, Δ_2^2 мәндері

$$\Delta_2^2=0 \tag{2.73}$$

$$\Delta_1^2=-\frac{1}{2}\left(\Delta_2^0+\frac{9}{2}\Delta_1^0\right) \tag{2.74}$$

бірмәнді анықталады. Онда шешім келесі түрге ие:

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta} + \frac{9}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)(t-1).$$

Енді, асимптотиканың шекаралық қабатты бөлігі $\omega_2(\tau)$ үшін келесі дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті аламыз:

$$\overset{(IV)}{\omega}_2(\tau) + 3\dddot{\omega}_2(\tau) + 2\ddot{\omega}_2(\tau) = 0 \tag{2.75}$$

$$\omega_2(0) = \frac{1}{2}\left(\Delta_2^1 + \Delta_1^2\right), \quad \dot{\omega}_2(0) = -\Delta_1^2, \ \ddot{\omega}_2(0) = -\Delta_2^1, \ \dddot{\omega}_2(0) = 3\Delta_2^0 + 2\Delta_1^2, \tag{2.76}$$

мұндағы, $\Delta_2^0, \Delta_2^1, \Delta_1^2$- сәйкесінше (2.57), (2.65),(2.74) формулалармен анықталады. (2.75), (2.76) есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі:

$$\omega_2(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta} + \frac{9}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-2\tau} - \tag{2.77}$$

$$-\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta} + \frac{9}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-\tau}.$$

(2.58), (2.61), (2.69), (2.77) анықталған коэффициенттерді (2.48) шешім түріне апарып қойып, (1.41), (1.42) сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің $O(\varepsilon)$ дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық шешімін аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}t^2 + \left(\beta - \alpha_0 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)t + \alpha_0 +$$

$$+\varepsilon\left[-\frac{1}{2}\left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)e^{-2\tau} + \left(\beta - \alpha_0 - \alpha_1 - \frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)e^{-\tau}\right] +$$

$$+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{2(1-2\alpha_2)}{2-\delta}+3\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-2\tau}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}+3\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-\tau}\right]+$$

$$+\varepsilon^3\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}+\frac{9}{2}\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-2\tau}+\right.$$

$$\left.+-\left(\frac{1-2\alpha_2}{2-\delta}+\frac{9}{2}\left(\beta-\alpha_0-\alpha_1-\frac{1-\delta\alpha_2}{2(2-\delta)}\right)\right)e^{-\tau}\right].$$

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста ең жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрлері бар кез келген ретті сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық теңдеулер үшін «қосымша сипаттауыш теңдеуінің» нақты түбірлері теріс болғандағы шеттік есеп қарастырылды.

1 тарауда сингулярлы ауытқыған біртекті теңдеу үшін Коши функциясы мен шекаралық функциялары құрылды және олардың асимптотикалық сипаттары алынды. Бұл алынған нәтижелерді пайдалана отырып, берілген сингулярлы ауытқыған шеттік есептің шешімінің аналитикалық формуласы алынып, сәйкесінше берілген есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы туралы теорема алынып, дәлелденді. Бұл теорема нәтижесінде берілген есеп шешімінің $t=0$ нүктесінде туындының өсу реті көрсетіліп, берілген сингулярлы ауытқыған шеттік есептің шешімі $t=0$ нүктесінде *m-дәрежелі* n_1 *–ші ретті бастапқы секіріске* ие екендігі шықты. Сонымен қатар, берілген сингулярлы ауытқыған интегралды–дифференциалдық шеттік есеп үшін өзгертілген ауытқымаған есеп құрылды. Сәйкесінше, шектік көшу туралы теорема алынып, дәлелденді.

2-тарауда шекаралық функция әдісі арқылы регулярлы және шекаралық қабаттың асимптотикалық коэффициенттері алынды. Берілген сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық есептің шешімі үшін құрылған асимптотикалық жуықтау берілген аралықта бірқалыпты екені дәлелденді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Пуанкаре А. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: 3 т. — Париж : Gauthier-Villars, 1892–1899. — Т. 1–3.
2. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. — Харьков, 1892. — 251 б.
3. Рябов Ю. А. Оценка области сходимости периодических рядов решений дифференциальных уравнений с малым параметром. // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 118, № 4. — 642–645 б.
4. Prandtl L. Uber Fliissigkeits - bewegung bei kleiner Reibung, Verhandlungen // III. Int. Math. Kongresses, Tuebner, Leipzig. - 1905. - 484-491б.
5. Friedrichs K., Wasow W. Singular perturbations of nonlinear oscillations. // Duke Math. J.- 1946.- №13.- 367–381б.
6. Friedrichs K. Asymptotic phenomena in mathematical physics. // Bull. Amer. Math. Soc. - 1955. – Т.61, №6. - 485–504 б.
7. Levinson N. A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation. // Duke Math. Journal. – 1958. – Т. 25, №2. – 331 – 342б.
8. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
9. Wasow W. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. — New York : Interscience (Wiley), 1965.
10. Wasow W. Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1956.— Vol. 9. — P. 93–113. — DOI: 10.1002/cpa.3160090107.
11. Wasow W. Introduction to the asymptotic theory of ordinary linear differential equations. // Report of the National Bureau of Standards.– 1954. 54-56б.
12. Liouville J. Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal de mathématiques pures et appliquées. — 1837. — Т. 2. — 16–35б.
13. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer differential systemeabe Funktionen eines Parametere. // Math. Ann. – 1907. – №63. – 207 – 300б.
14. Birkhoff G. D. On the asymptotic character in the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — Т. 9. — 219–231 б.
15. O'Malley R. Introduction to Singuar Perturbations.– Academic Press, New Tock, 1974.
16. O'Malley R. E. Jr. Singular perturbation methods for ordinary differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1991.
17. O’Malley R., Jameson A. Singular perturbations and singular arcs. Part 1 // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — Vol. AC-20. — 218–226 б.

18. O'Malley R., Jameson A. Singular perturbations and singular arcs. Part 2 // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — Vol. AC-22. — 328–337 б.
19. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // УМН. – 1963. – Т. 18, № 3. – 15-86 б.
20. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 б.
21. Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Математический сборник. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 586–649.
22. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения вкритических случаях. – М.: Изд. Московского ун-та, 1978. – 106 б.
23. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 б.
24. Vasil'eva A. B. On the development of singular perturbation theory at Moscow State University and elsewhere // SIAM Review. — 1994. — Vol. 36. — 440–452 б.
25. Chang K., Howes F. Nonlinear singular perturbation phenomena: Theory and application. — New York : Springer-Verlag, 1984.
26. Cole J. Perturbation methods in applied mathematics. — Waltham, MA : Ginn-Blaisdell, 1968.
27. Erdélyi A. Asymptotic expansions. — New York : Dover Publications, 1956.
28. Hinch E. Perturbation methods. — Cambridge : Cambridge University Press, 1991.
29. Hoppensteadt F. Analysis and simulation of chaotic systems. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993.
30. Kevorkian J. Partial differential equations: Analytical solution techniques. — Pacific Grove, CA : Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.
31. Murdock J. Perturbations: Theory and methods. — New York : John Wiley, 1991.
32. Murray J. Asymptotic analysis, 2nd ed. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1984.
33. Nayfeh A. Perturbation methods. — New York : John Wiley, 1973.
34. Nayfeh A. Introduction to perturbation techniques. — New York : John Wiley, 1981.
35. Nayfeh A. Problems in perturbation. — New York : John Wiley, 1985.
36. Smith D. Singular-perturbation theory. — Cambridge : Cambridge University Press, 1985.
37. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. — New York : Academic Press, 1964.
38. Vishik M. Asymptotic behavior of solutions of evolutionary equations. — Cambridge, London, New York : Cambridge University Press, 1992.

39. Wasow W. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. — New York : Interscience, 1965.
40. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. сб. -1948. -Т 22 , №2. -193-204б.
41. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. – 1950. – Т. 27, №69. – 147-156б.
42. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. // Математический сборник. – 1952. – Т.73, № 3. – 575-586б.
43. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. -1957. – Т. 12, № 5. - 3-122б.
44. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР. – 1958. – Т. 121, № 5. – 778-781б.
45. Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. -1960. -Т. 132, №6. –1242-1245б.
46. Касымов К.А. Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. // УМН. – 1962. – Т.12, № 5. – 187-188б.
47. Kassymov K. A. The initial jump problem for non-linear systems of differential equations containing a small parameter. // Doklady Akademii Nauk SSSR. –1968. –Vol. 179, №2. – 275-278б.
48. Kassymov K. A. Asymptotics of solutions of Cauchy problem with an initial jump for non-linear systems of integro-differential equations with a small parameter for the highest derivative // Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR. –1968.–№5. –69-72б.
49. Kassymov K. A. Asymptotics of the solution of a problem with initial jump for nonlinear systems of differential equations with a small parameter in the highest derivative. // Doklady Akademii Nauk SSSR. –1969.– T. 189, №5. – 941-944б.
50. Kassymov K. A. Asymptotics of the solutions of the problem with an initial jump for a system of differential equations of hyperbolic type with a small parameter at the derivative. // Doklady Akademii Nauk SSSR. –1971.– T. 196, №2. –274-277б.
51. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1957. — Т. 21, № 3. — 605–626б.
52. Bogoliubov N., Mitropolsky Y.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations.– Delhi: Hindustan Publ. Corp. –1961.

53. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярная вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
54. Vasil'eva A., Butuzov V., Kalachev L. The boundary function method for singular perturbation problems // SIAM Studies in Applied Mathematics. — Philadelphia : SIAM, 1995. — Vol. 14.
55. Lomov S. Introduction to the general theory of singular perturbations. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1992.
56. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе : Илим, 1972.
57. Kevorkian J., Cole J.D. Multiple Scale and Singular Perturbations Method. – New York: Springer, 1996.
58. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. – Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. Springer. 2005.
59. Бутузов Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Асимптотические методы в исследовании контрастных структур // М.: Физматлит, 1999. – 256 с.
60. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. – SIAM, Philadelphia.1995.
61. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения — М: ФИЗМАТЛИТ. 2005.
62. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н., Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика. – 1997.–№ 7.
63. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах» // Фундаментальная и прикладная математика –1998.–Т. 4, № 3.
64. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН – 2010. – № 268.
65. Jones C.K.R.T. , Geometric singular perturbation theory // Dynamical Systems, Lecture Notes in Math., Springer - 1995. - V. 609, pp. 44–118.
66. Szmolyan P. and Wechselberger M. Canards in R^3// Differential Equations.-2001.-Vol.177, №1 - P.419-453.
67. Krupa, M. and Szmolyan, P. Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points—Fold and Canard Points in Two Dimensions. SIAM Journal on Mathematical Analysis. - 2001.-Vol. 33. -P. 286-314.
68. Kaper T. J. An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems. – Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 1999.
69. Kuehn C. Multiple Time Scale Dynamics. – Berlin: Springer Nature, Vol.191.– 2015.

70. Pavliotis G.A., Stuart A.M. Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. – New York: Springer, 2008.
71. Desroches M. , Guckenheimer J. ,Krauskopf B. , Kuehn C. , Osinga H. M. and Wechselberger M. Mixed-mode oscillations with multiple time scales. -SIAM Review.–2012. –Vol.54, №2. – P.211–288.
72. Kuehn C. Multiple Time Scale Dynamics.– Cham:Springer Nature, 2015.
73. Pavliotis G.A., Stuart A.M. Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. – Springer Science and Business Media, 2008.
74. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations.– Berlin: Springer, 2008.
75. Linss T. Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. – Lecture Notes in Mathematics, 2010.
76. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика.– 2006.– Т.67, № 1. – С. 1-43.
77. Naidu D.S., Kurina G.A., Dmitriev M.G. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview //International Journal of Information and Systems Sciences. – 2017.–Vol. 9, №1.–P.1–36.
78. Дмитриев М.Г., Курина Г.А., Овезов Х.А. Использование прямой схемы для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с сингулярным возмущением // Изв. РАН. Теория и системы управления.– 1996.–№ 4. –С.62-68.
79. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. О некоторых сингулярно возмущенных задачах оптимального управления // Сб. Проблемы устойчивости и управления, Физматлит. — 2013.–С.148-160.
80. Даник Ю. Э., Дмитриев М. Г. Магистрали и сингулярные возмущения// Труды Института системного анализа РАН. – 2015.– Т. 65, № 1. –С.60-67.
81. Даник Ю.Э., Дмитриев М. Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // ИТиВС.– 2015.– № 4, С.35–44.
82. Курина Г.А., Нгуен Т.Х. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012.–Т.52, № 4.
83. Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишев К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19–28.
84. Иманалиев М. И., Байзаков А. Б. Достаточные условия существования решений начальной задачи сингулярно-возмущенных дифференциальных

уравнений в частных производных //Вестник КРСУ. – 2010. – Т. 10. – №. 9. – С. 127.
85. Alymkulov K. Analog of the method of boundary layer function for the solution of the Lighthill's model equation with the regular singular point// Am. J. Math. Stat. –2013.– Vol. 3, No. 1.–P. 53-61.
86. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point //Universal J. Appl. Math. – 2014. – Т. 2. – №. 3. – С. 119-124.
87. Alymkulov K., Tursunov T. D. Perturbed differential equations with singular points // Recent Studies in Perturbation Theory. – 2017. – С. 1-42.
88. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – №. 6 (26). – С. 37-44.
89. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота.– Тр. ИММ УрО РАН.– 2016.– Т.1, №22.– С.271–281.
90. Liu C.-S. and Li B. Solving second-order singularly perturbed ODE by the collocation method based on energetic Robin boundary functions// Applications of Mathematics.– 2019.– Vol. 64, № 6, – P. 679–693.
91. Puvaneswari A., Babu A.R., Valanarasu T. Cubic spline scheme on variable mesh for singularly perturbed periodical boundary value problem// Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020.– Vol. 50, № 1.–P. 157–172.
92. Vira M.B. Asymptotics of the Solutions of Boundary-Value Problems for Linear Singularly Perturbed Systems of Differential Equations in the Case of Multiple Spectrum of the Boundary Matrix// J Math Sci.– 2020.–Vol.246.–P.303-316.
93. Kachalov V. Differential equations with a small parameter in a banach space.– Understanding Banach Spaces.– 2019.– P. 415–428.
94. Kassymov K. A., Nurgabyl D. Asymptotic estimates of solution of a singularly perturbed boundary value problem with an initial jump for linear differential equations // Differential Equations. — 2004. — Vol. 40, № 5. — P. 641–651.
95. Dauylbayev M.K., Atakhan N. The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential eqautions // Miskolc Mathematical Notes – 2015. –Vol. 16, № 2. – P. 747-761.
96. Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations. // Journal of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. – 2016. –Vol. 5, № 2. – P. 147-154.
97. Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Boundary-Value Problems with Initial Jumps for Singularly Perturbed Integrodifferential Equations. // Journal of Mathematical Sciences – 2017. –Vol. 222, № 3. – P. 214-225.

98. Dauylbayev M.K., Uaissov A.B. Asymptotic Behavior of the Solutions of Boundary-Value Problems for Singularly Perturbed Integrodifferential Equations. // Ukrainian Mathematical Journal.–2020.–T. 71, №11.– 1677-1691б.
99. Dauylbayev M.K., Uaissov A.B. Integral boundary-value problem with initial jumps for a singularly perturbed system of integrodifferential equations. // Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena.– 2020.–T.141.
100. Akhmet M. On the integral manifolds of the differential equations with piecewise constant argument of generalized type. // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations at the Florida Institute of Technology.– Florida. 2005.–11-20б.
101. Akhmet M. Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models.– Paris: Atlantic Press.– 2011.
102. Akhmet M. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument generalized type. // Nonlinear Anal.-Theor. – 2007.–T.66.– 367-383б.
103. Akhmet M. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized. // J Math Anal. Appl. – 2007.–T.336.- 646-663б.
104. Akhmet M., Fen M., Kirane M. Almost periodic solutions of retarded SICNNs with functional response on piecewise constant argument. // Neural Comp. and Appl.– 2015.–T.27.–.2483-2495б.
105. Akhmet M. Exponentially Dichotomous linear systems of differential equations with piecewise constant argument. // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity.–2012.–T.1.–337-352б.
106. Ахмет М., Дауылбаев М., Мирзакулова А. A singularly perturbed differential equation with piecewise constant argument of generalized type // Turkish Journal of Mathematics. — 2018. — Т. 42, № 4. — 1680–1685б. — https://doi.org/10.3906/mat-1704-19
107. Akhmet M.U., Dauylbayev M.K., Atakhan N., Mirzakulova A.E. Singularly per-turbed linear oscillator with piecewise-constant argument. // Journal of Mathematics, Mechanicsand Computer Science. – 2018.–T.97, №1. 3–24б. https://doi.org/10.26577/jmmcs-2018-1-480
108. Artykbayeva Z.N., Mirzakulova A.E., Assilkhan A.A. Analytical solution of initial value problem for ordinary differential equation with singular perturbation and piecewise constant argument. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science.–2024.–T.122,№2. 3–13б.
https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-122-02-b1
109. Akhmet M., Cag S. Chattering as a Singular Problem, Nonlinear Dynamics.– 2017.–T. 90,№4.– 2797–2812б.
110. Akhmet M., Cag S. Bifurcation analysis of Wilson-Cowan model with singular impulses. Discontinuity Nonlinearity Complex.– 2021, T.10.– 161–172б.
111. Akhmet M., Cag S. Tikhonov theorem for differential equations with singular impulses. Discontinuity Nonlinearity Complex.– 2018.– T.7.– 291–303б.

112. Akhmet M., Aviltay N., Dauylbayev M., Seilova R. A case of impulsive singularity.// J. Math. Mech. Comput. Sci.– 2023.–T.117.– 3–14б.
113. Aviltay N., Akhmet M., Zhamanshin A. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses. // Carpathian J. Math.– 2024.–T.40.– 581–598б.
114. Kalimbetov B. T., Tuychiev O. D. Asymptotic solution of the Cauchy problem for the singularly perturbed partial integro-differential equation with rapidly oscillating coefficients and with rapidly oscillating heterogeneity //Open Mathematics. – 2021. – Т. 19. – №. 1. – С. 244-258.
115. Kalimbetov B., Safonov V., Zhaidakbayeva D. Asymptotic solution of a singularly perturbed integro-differential equation with exponential inhomogeneity //Axioms. – 2023. – Т. 12. – №. 3. – С. 241.
116. Нургабыл Д.Н. Асимптотические оценки решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. // Вестник ЖГУ им.И.Жансугурова. –2012. –№ 2. – 4-8б.
117. Kasymov K.A., Nurgabyl D.N., Uaisov A.B. Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives. // Ukrainian mathematical journal. 2013.
118. Нургабыл Д.Н. Построения решения краевой задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. // Известия НАН РК, серия физико-математическая.–2014.– Т.295, №3.– 113-118б.
119. Мирзакулова А. Е., Дауылбаев М. К., Ахмет М. У., Джетписбаева А. К. The Cauchy problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equations // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2018. — Т. 97, № 1. — 14–24б. — https://doi.org/10.26577/jmmcs-2018-1-481
120. Dauylbayev M. K., Akhmet M., Mirzakulova A. E., Uaissov A. B. Asymptotic convergence of the solution of the initial value problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equation. // International Journal of Mathematics and Physics.– 2018.–T.9,№1, 50–59б. https://doi.org/10.26577/ijmph.2018.v9i1.246
121. Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotical Convergence of Solutions of Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Higher-Order Integro-Differential Equations. // Quaestiones Mathematicae.– 2024.–T.47. https://doi.org/10.2989/16073606.2024.2364297
122. Dauylbayev M., Konisbayeva K. Asymptotic expansion of the solution of a boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations of higher orders. // Boundary Value Problems.– 2025.–T.153. https://doi.org/10.1186/s13661-025-02140-5
123. Atakhan N., Nurpeissov K.S., Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution for a singularly perturbed equation with unbounded boundary conditions // Bulletin of the Karaganda, Mathematics Series.–2022.– T.108, №4.– https://doi.org/10.31489/2022m4/20-33

124. Mirzakulova A.E., Dauylbayev M.K., & Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution of a singularly perturbed equation with piecewise constant argument. Lobachevskii Journal of Mathematics.– 2024.– T.45,№4.– 1713–1721б. https://doi.org/10.1134/S1995080224601450
125. Mirzakulova A.E., Konisbayeva K.T. Uniform asymptotic expansion of the solution for the initial value problem with a piecewise constant argument. // Bulletin of the Karaganda, Mathematics Series.–2024.–T.116,№4.– https://doi.org/10.31489/2024m4/138-148
126. M.K. Dauylbayev, K.T. Konisbayeva, N.R. Tortbay Integral BVP for singularly perturbed system of differential equations // International Journal of Mathematics and Physics.– 2021. – T.12,№1.–25-33б. https://doi.org/10.26577/ijmph.2021. v12.i1.04
127. K.T. Konisbayeva, M.K. Dauylbayev, Mirzakulova A.E., Asymptotic estimates of the solution of the BVP for singularly perturbed integro-differential equations// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. №1(129)-2026. – P. 39-51. https://doi.org/10.26577/JMMCS129120264
128. Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралды шеттік есеп // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2021 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2021. –19 б.).
129. Жоғары туындыларының алдында кіші параметрі бар сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп // «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 4-6 сәуір 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2024. –21б.).
130. Асимптотическая оценка решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының 70 жылдығына және Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Математика институтының 40 жылдығына арналған «В. Бөрібаев оқулары» халықаралық ғылыми конференциясы, Бишкек, Қырғызстан, 20-21 маусым 2024 ж: баяндамалар тезистері. (Бишкек-2024. 59 б.)
131. Asymptotic expansion of singularly perturbed integro-differential equations //Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың 90 жылдығына және академик Ш. С. Смақұловтың 75 жылдығына арналған "Ғылым, инженерия және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар" (CITech-2024) конференциясы, Алматы, Қазақстан, 23-24 қазан 2024 ж: баяндамалар тезистері. (Алматы-2024. 89 б.)
132. Сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық теңде үшін шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы // Математикалық конгресс-2026. Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференциясы, Шымкент, Қазақстан, 3-7 сәуір 2026 ж: баяндамалар тезистері.